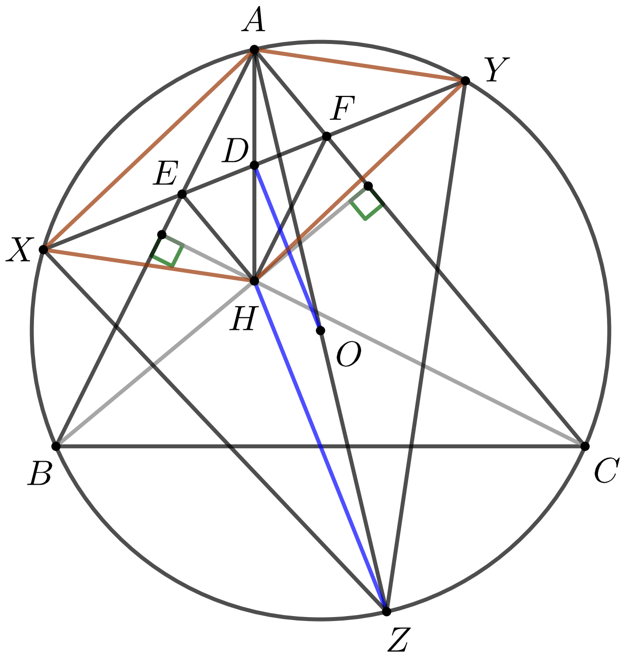
Problema săptămânii 365

Fie H ortocentrul triunghiului ascuţitunghic ABC, E, F puncte pe AB, respectiv AC, astfel încât $AEHF$ să fie paralelogram, X, Y punctele de intersecţie ale dreptei EF cu cercul ω circumscris triunghiului ABC şi Z punctul diametral opus lui A în cercul ω. Demonstraţi că H este ortocentrul triunghiului XYZ.

M. Kursky, Concursul Şarîghin, faza I, 2022-2023

Soluţia oficială:
Fie D mijlocul lui EF. Din ipoteză, $\sphericalangle BHE = \sphericalangle CHF = 90°$, deci triunghiurile BHE şi CHF sunt asemenea şi $\dfrac{AF}{EB} = \dfrac{EH}{EB} = \dfrac{HF}{FC} = \dfrac{AE}{FC}$. Obţinem $AE \cdot EB = AF \cdot FC$, adică punctele E şi F au puteri egale faţă de cercul circumscris. Asta înseamnă că $OE = OF$, deci OD este mediatoarea lui EF, deci şi mediatoarea lui XY. Atunci linia mijlocie OD a triunghiului AHZ este perpendiculară XY. Rezultă că ZH este înălţime în triunghiul XYZ şi, cum simetricul lui H faţă de mijlocul laturii XY, adică A, se află pe cercul circumscris triunghiului XYZ, rezultă că H este ortocentrul acestui triunghi.



Altă finalizare (*David Mathe*):
D fiind mijlcul lui AH şi XY avem că $AXHY$ este paralelogram, deci $XH \perp ZY$ deoarece $XH \parallel AY$ şi $AY \perp ZY$.

Am primit soluţii de la: *David Mathe* şi *Alexandru Ciobotea*.

Problem of the week no. 365

Let H be the orthocenter of an acute-angled triangle ABC, E, F be points on AB, AC respectively, such that $AEHF$ is a parallelogram, X, Y be the common points of the line EF and the circumcircle ω of triangle ABC, and Z be the point of ω opposite to A. Prove that H is the orthocenter of triangle XYZ.

M. Kursky, Sharygin Contest, 2022-2023

Official solution:

Let D be the midpoint of EF. The assumption yields that $\sphericalangle BHE = \sphericalangle CHF = 90°$, therefore the triangles BHE and CHF are similar and $\dfrac{AF}{EB} = \dfrac{EH}{EB} = \dfrac{HF}{FC} = \dfrac{AE}{FC}$. Hence $AE \cdot EB = AF \cdot FC$, i.e. the powers of E and F with respect to the circumcircle are equal. This means that $OE = OF$, so OD is the perpendicular bisector of EF, therefore the perpendicular bisector of XY. Thus the medial line OD of triangle AHZ is perpendicular to XY. Therefore ZH is the altitude of triangle XYZ, and since the reflection A of H with respect to the midpoint of XY lies on the circumcircle, we obtain that H is the orthocenter.