Problema săptămânii 364

Pentru orice număr natural n, $(n \geq 3)$, notăm cu $f(n)$ numărul de triunghiuri necongruente care au laturile de lungime întreagă şi perimetrul egal cu n (de exemplu, $f(3) = 1$, $f(4) = 0$, $f(7) = 2$). Arătaţi că

(a) $f(1999) > f(1996)$;
(b) $f(2000) = f(1997)$.

Olimpiadă India, 2000

Soluţie: Pentru un n fixat, fiecărui triunghi cu laturi de lungimi $a, b, c \in \mathbb{N}$ şi perimetru n îi punem în corespondenţă un triunghi care are laturile de lungimi $a+1, b+1, c+1 \in \mathbb{N}$. (Este uşor de văzut că dacă $a+b > c$ atunci şi $(a+1)+(b+1) > (c+1)$ şi analoagele.) Noile triunghiuri au perimetrul $n+3$. Este evident că această corespondenţă asociază unor triunghiuri congruente triunghiuri congruente şi unor triunghiuri necongruente triunghiuri necongruente. Astfel, este clar că $f(n) \leq f(n+3)$.
a) Pe lângă cele $f(1996)$ de triunghiuri obţinute din cele de perimetru 1996 prin corespondenţa descrisă mai sus, mai sunt şi alte triunghiuri cu perimetrul 1999, de exemplu cel isoscel de bază 1 (şi având celelalte două laturi de lungime 999). Evident, nu se poate ca $a+1 = 1$, deci sunt strict mai multe triunghiuri necongruente de perimetru 1999 decât de perimetru 1996.
b) Vom demonstra că, dacă n este par, nu există alte triunghiuri de perimetru n în afara celor $f(n-3)$ triunghiuri obţinute prin corespondenţa descrisă mai sus. Dacă $a \leq b \leq c$ sunt lungimile (întregi) ale laturilor unui triunghi cu perimetrul n, atunci $a-1, b-1, c-1$ sunt lungimile laturilor unui triunghi cu perimetrul $n-3$. Într-adevăr, avem $a-1, b-1, c-1 > 0$ deoarece $a = 1$ ar implica $a+b = 1+b > c \geq b$, deci $b = c$. Dar atunci $n = a+b+c = 1+2b$ este impar, contradicţie. De asemenea, din $a+b > c$, $a, b, c \in \mathbb{N}$, avem $a+b \geq c+1$. Dar, cum $a+b+c = n$ este par, $a+b$ şi $c+1$ au parităţi diferite, deci nu pot fi egale. Rezultă că $a+b > c+1$, adică $(a-1)+(b-1) > (c-1)$, deci $a-1, b-1, c-1$ sunt lungimile laturilor unui triunghi care, prin crespondenţa descrisă mai sus, este dus într-un triunghi de perimetru n. Astfel, orice triunghi de perimetru n, n-par, provine dint-unul de perimetru $n-3$ prin procedeul descris mai sus, deci $f(n) = f(n-3)$ şi, în particular, $f(2000) = f(1997)$.

Remarcă: Şirul din problemă este foarte bine cunoscut (vezi oeis). Folosind cele de mai sus este uşor de dedus formula pentru $f(n)$ folosind că

$$f(2k) = f(2k-3) \text{ şi } f(2k+1) = f(2k-2) + \left[\frac{k+1}{2}\right].$$

Am justificat prima relaţie. Pentru cea de-a doua este suficient să vedem care dintre triunghiurile de perimetru $2k+1$ nu se obţin din cele de perimetru $2k-2$ prin corespondenţa de mai sus. Răspunsul este că nu se obţin triunghiurile cu $a \leq b \leq c$, $a+b+c = 2k+1$ care au $c = k$. Acestea verifică $a+b > c$ (căci $a+b = k+1 > k = c$) dar $a-1, b-1, c-1$ nu sunt laturi de triunghi căci $(a-1)+(b-1) = k-1 = (c-1)$.

Cum $1 \leq a \leq b$ şi $a+b=k+1$, sunt $\left[\frac{k+1}{2}\right]$ asemenea triunghiuri.

Am primit soluţii de la: *David Mathe, Alazaroae Valentin Alin, Alexandru Ciobotea* şi *Darius Chiţu.*

Problem of the week no. 364

For any positive integer n, $(n \geq 3)$, let $f(n)$ denote the number of non-congruent integer-sided triangles with perimeter n (e.g., $f(3) = 1$, $f(4) = 0$, $f(7) = 2$). Show that
(a) $f(1999) > f(1996)$;
(b) $f(2000) = f(1997)$.

India, 2000

Solution: (based on the solution given by amirahul on AoPS)
(a) Let a, b, c be the sides of a triangle with $a + b + c = n$, and each being a positive integer. Then $a+1$, $b+1$, $c+1$ are also sides of a triangle with perimeter $n+3$ because $a < b + c \Rightarrow a + 1 < (b + 1) + (c + 1)$, and so on. The correspondence

$$(a, b, c) \mapsto (a + 1, b + 1, c + 1)$$

takes non-congruent triangles into non-congruent triangles, so clearly $f(n) \leq f(n+3)$, for all n. In particular, $f(1996) \leq f(1999)$. On the other hand, $(999, 999, 1)$ are the sides of a triangle with perimeter 1999, which is not obtainable from any triangle with perimeter 1996 by the above transformation. We conclude that $f(1999) > f(1996)$.
(b) As in the case (a) we conclude that $f(2000) \geq f(1997)$. On the other hand, if x, y, z are the integer sides of a triangle with $x+y+z = 2000$, and say $x \geq y \geq z \geq 1$, then we cannot have $z = 1$, for otherwise we would get $x + y = 1999$ forcing x, y to have opposite parity so that $x - y \geq 1 = z$ violating triangle inequality for x, y, z.
Hence $x \geq y \geq z > 1$. This implies that $x - 1 \geq y - 1 \geq z - 1 > 0$. We already have $x < y + z$. If $x \geq y + z - 1$, then we see that $y + z - 1 \leq x < y + z$, showing that $y + z - 1 = x$. Hence we obtain $2000 = x + y + z = 2x + 1$ which is impossible. We conclude that $x < y + z - 1$. This shows that $x - 1 < (y - 1) + (z - 1)$ and hence $x - 1$, $y - 1$, $z - 1$ are the sides of a triangle with perimeter 1997. Thus, any triangle of perimeter 2000 can be obtained from a triangle of perimeter 1997 by adding 1 to each of the sides. This gives $f(2000) \leq f(1997)$. Thus we obtain the desired result.

Remark: The sequence is well documented on oeis. A proof for the general formula for $f(n)$ can be found, for example, here.