Problema săptămânii 366

Dacă a, b, c, d sunt numere reale cu proprietatea că

$$abcd = 1 \text{ şi } a + b + c + d = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d},$$

arătaţi că printre numerele ab, ac, ad, bc, bd, cd există cel puţin două egale.

Miloš Milosavljević, Serbia 2013

Soluţia 1: (*Titu Zvonaru, Valentin Alin Alazaroae*)
Ridicăm relaţia a doua la pătrat şi folosim că $abcd = 1$. Avem $a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd = \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2}+\frac{2}{ab}+\frac{2}{ac}+\frac{2}{ad}+\frac{2}{bc}+\frac{2}{bd}+\frac{2}{cd}$, adică, echivalent:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2},$$

$$a^3bcd + ab^3cd + abc^3d + abcd^3 = b^2c^2d^2 + a^2c^2d^2 + a^2b^2d^2 + a^2b^2c^2,$$

$$a^2bc(ad - bc) + ab^2d(bc - ad) + ac^2d(bc - ad) + bcd^2(ad - bc) = 0,$$

$$(ad - bc)(a^2bc - ab^2d - ac^2d + bcd^2) = 0,$$

$$(ad - bc)(ab - cd)(ac - bd) = 0.$$

De aici concluzia e imediată.

Soluţia 2: (*David Mathe*)
Avem, echivalent: $abc + abd + acd + bcd - a - b - c - d = 0$, sau $ab(c + d) - (c + d) + cd(a + b) - (a + b) = 0$, adică $(ab - 1)(c + d) + (cd - 1)(a + b) = 0$, deci $(ab - abcd)(c + d) + (cd - 1)(a + b) = 0$ şi $ab(1 - cd)(c + d) + (cd - 1)(a + b) = 0$, $(1 - cd)(abc + abd - a - b) = 0$, $(1 - cd)[a(bc - 1) + b(ad - 1)] = 0$, $(1 - cd)[a(bc - 1) + b(ad - abcd)] = 0$, $(1 - cd)(bc - 1)(a - abd) = 0$ şi, în final, $a(1 - cd)(1 - bc)(1 - bd) = 0$. Cum $a = 0$ contrazice $abcd = 1$, obţinem că produsul a două dintre numerele a, b, c, d este egal cu 1, iar atunci din condiţia $abcd = 1$ rezultă că şi produsul celorlalte două este egal cu 1, deci două dintre produsele sunt egale (cu 1).

Remarcă: Este uşor de văzut că orice cvadruplet de forma x, y, $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$ verifică enunţul, deci că trebuie să arătăm că avem una din egalităţile $ab = cd$, $ac = bd$ sau $ad = bc$, adică $ab = 1$, $ac = 1$ sau $ad = 1$.
Pentru cei care ştiu polinoame şi relaţiile lui Viète, e uşor de văzut că ecuaţia de gradul IV care are rădăcinile a, b, c, d, adică $(x - a)(x - b)(x - c)(x - d) = 0$ are forma $x^4 - sx^3 + mx^2 - sx + 1 = 0$, adică este o ecuaţie reciprocă, ceea ce arată că dacă x_0 este o soluţie a ei, atunci şi $\frac{1}{x_0}$ este soluţie, adică avem $\{a, b, c, d\} = \left\{\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \frac{1}{d}\right\}$.
(Scrierea e puţin abuzivă, egalitatea trebuind a fi înţeleasă ca o egalitate de liste: dacă printre numerele din prima listă unele elemente se repetă, atunci şi în lista a doua respectivele numere apar la fel de des.)

Am primit soluţii de la: *Titu Zvonaru, David Mathe, Darius Chiţu, Adrian Zanca, Valentin Alin Alazaroae* şi *Alexandru Ciobotea.*

Problem of the week no. 366

If real numbers a, b, c, d satisfy

$$abcd = 1 \text{ and } a + b + c + d = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d},$$

prove that at least two of the numbers ab, ac, ad, bc, bd, cd are equal.

Miloš Milosavljević, Serbia 2013

Solution 1: (*Titu Zvonaru, Valentin Alin Alazaroae*)
We square the second equation and use $abcd = 1$. We have $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2} + \frac{2}{ab} + \frac{2}{ac} + \frac{2}{ad} + \frac{2}{bc} + \frac{2}{bd} + \frac{2}{cd}$, i.e. equivalently:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2},$$

$$a^3bcd + ab^3cd + abc^3d + abcd^3 = b^2c^2d^2 + a^2c^2d^2 + a^2b^2d^2 + a^2b^2c^2,$$

$$a^2bc(ad - bc) + ab^2d(bc - ad) + ac^2d(bc - ad) + bcd^2(ad - bc) = 0,$$

$$(ad - bc)(a^2bc - ab^2d - ac^2d + bcd^2) = 0,$$

$$(ad - bc)(ab - cd)(ac - bd) = 0.$$

The conclusion follows readily.

Solution 2: (*David Mathe*)
We have equivalently $abc + abd + acd + bcd - a - b - c - d = 0$, or $ab(c + d) - (c + d) + cd(a + b) - (a + b) = 0$, i.e. $(ab - 1)(c + d) + (cd - 1)(a + b) = 0$, hence $(ab - abcd)(c + d) + (cd - 1)(a + b) = 0$ and $ab(1 - cd)(c + d) + (cd - 1)(a + b) = 0$, $(1-cd)(abc+abd-a-b) = 0$, $(1-cd)[a(bc-1)+b(ad-1)] = 0$, $(1-cd)[a(bc-1)+b(ad-abcd)] = 0$, $(1 - cd)(bc - 1)(a - abd) = 0$ and finally, $a(1 - cd)(1 - bc)(1 - bd) = 0$. As $a = 0$ contradicts $abcd = 1$, we obtain that the product of two of the numbers a, b, c, d is 1, and then $abcd = 1$ shows that the product of the other two variables is also 1, hence two of the products are equal (to 1).