Problema săptămânii 363

Determinaţi numerele naturale nenule cu proprietatea că putem grupa divizorii săi pozitivi în perechi astfel încât numerele din fiecare pereche să fie prime între ele.

Olimpiadă Ungaria, 2023

Soluţie: (*Darius Chiţu, Valentin Alin Lazaroae*)
Numerele căutate sunt numerele mai mari ca 1 libere de pătrate, adică produse de $k \geq 1$ numere prime distincte.
Evident $n = 1$ nu convine.
Dacă $n \geq 2$ convine, ne uităm la descompunerea sa în factori primi: $n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{a_k}$.
Dacă ar exista un exponent $a_i \geq 2$, atunci şi n şi $\frac{n}{p_i}$ ar avea în descompunerea loc în factori primi fiecare din numerele $p_1, p_2, \ldots, p_k$, deci ar trebui puse ambele înpereche cu 1, ceea ce nu se poate.
Aşadar, orice număr cu proprietatea cerută este mai mare ca 1 şi liber de pătrate.
Reciproc, orice asemenea număr convine: putem grupa divizorul d cu divizorul $\frac{n}{d}$ care este relativ prim cu d.

Am primit soluţii de la: *Darius Chiţu, Valentin Alin Lazaroae* şi .

Problem of the week no. 363

Determine all positive integers whose positive divisors can be grouped into pairs consisting of two coprime numbers.

Hungarian Olympiad, 2023

Solution: (*Darius Chiţu, Valentin Alin Lazaroae*)
The numbers with the desired property are the squarefree integers larger than 1, i.e. the products of $k \geq 1$ distinct primes.
Clearly $n = 1$ does not satisfy the property.
If $n \geq 2$ satisfies it, we look at its prime factorization: $n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{a_k}$. If there is an exponent $a_i \geq 2$, then both n and $\frac{n}{p_i}$ have in their prime factorization each of the factors $p_1, p_2, \ldots, p_k$, so they both need to be paired up with 1, which is not possible.
Thus, any number with the desired property is larger than 1 and squarefree.
Conversely, any such number has indeed the desired property: we can group the divisor d with divisor $\frac{n}{d}$ which is coprime with d.