Problema săptămânii 359

Rezolvaţi în mulţimea numerelor naturale nenule ecuaţia $2^{x+1} + 45^y = z^2$.

Nicolae Papacu, Revista Arhimede, nr.2/2022

Soluţie: (*Titu Zvonaru*)
Vom rezolva ecuația în numere naturale.
Dacă $y = 0$, atunci $2^{x+1} = (z - 1)(z + 1)$. Există numerele naturale a, b astfel încât $z + 1 = 2^a$, $z - 1 = 2^b$, cu $x + 1 = a + b$. Obținem $2^a - 2^b = 2$, adică $2^{a-1} - 2^{b-1} = 1$, deci $b = 1$, $a = 2$. Rezultă soluția $(x, y, z) = (2, 0, 3)$.
Fie $y \neq 0$. Dacă $x = 2k$, atunci $2^{2k+1} = 2(3+1)^k = M3+2$; deducem că $2^{2k+1}+45^y = M3 + 2$, care nu este pătrat perfect. Rezultă că $x = 2k - 1$, iar ecuația din enunț devine

$$(z - 2^k)(z + 2^k) = 45^y.$$

Deducem că $z + 2^k = 3^p \cdot 5^q$ şi $z - 2^k = 3^s \cdot 5^t$, unde p, q, s, t sunt numere naturale cu $p + s = 2y$, $q + t = y$. Avem $2 \cdot 2^k = 3^p \cdot 5^q - 3^s \cdot 5^t$, de unde rezultă că $ps = 0$, $qt = 0$. Dacă $s = t = 0$, atunci $p = 2q$ și $45^q - 1 = M11$ - nu obținem soluții. Este ușor de observat că rămâne de rezolvat ecuația $2 \cdot 2^k = 9^q - 5^q$.
Dacă $q = 2n$, atunci $9^{2n} - 5^{2n} = 81^n - 25^n = M56 = M7$, deci nu obținem soluții.
Dacă $q = 2n+1$, atunci $9^q - 5^q = (M8+1)^q - 5(M8+1)^n = M8+4$, de unde rezultă că $a = 1$ şi $9^q - 5^q = 4$. Obținem soluția $(x, y, z) = (1, 1, 7)$.

Am primit soluţii de la: *Alexandru Ciobotea, Titu Zvonaru, Darius Chiţu* şi *Ioan Viorel Codreanu.*

Problem of the week no. 359

Find all positive integers x, y, z such that $2^{x+1} + 45^y = z^2$.

Nicolae Papacu, Arhimede Mag., no.2/2022

Solution: (*Titu Zvonaru*)
If x is even, $x = 2k$, then $2^{2k+1} = 2(3 + 1)^k = M3 + 2$; it follows that $2^{2k+1} + 45^y = M3 + 2$, which is not a perfect square. Thus, x is odd, $x = 2k - 1$, and the equation becomes

$$(z - 2^k)(z + 2^k) = 45^y.$$

We deduce that $z + 2^k = 3^p \cdot 5^q$ and $z - 2^k = 3^s \cdot 5^t$, where p, q, s, t are non-negative integers such that $p+s = 2y$, $q+t = y$. We have $2 \cdot 2^k = 3^p \cdot 5^q - 3^s \cdot 5^t$, and therefore $ps = 0$, $qt = 0$. If $s = t = 0$, then $p = 2q$ and $45^q - 1 = M11$, and hence no solutions. It is easy to see that in the remaning case we have to solve $2 \cdot 2^k = 9^q - 5^q$.
If q is even, $q = 2n$, then $9^{2n} - 5^{2n} = 81^n - 25^n = M56 = M7$, so, again, no solutions.
If q is odd, $q = 2n+1$, then $9^q - 5^q = (M8+1)^q - 5(M8+1)^n = M8+4$, which means that $a = 1$ and $9^q - 5^q = 4$. We obtain the solution $(x, y, z) = (1, 1, 7)$.