BARAJ DE JUNIORI ,,Euclid”
Cipru, 16 aprilie 2022 (barajul 4)

Problema 1. Numerele reale pozitive α, β satisfac relaţiile

$$\begin{cases} \alpha^3 = \alpha + 1 \\ \beta^6 = \beta + 3\alpha. \end{cases}$$

Arătaţi că $\alpha > \beta$.

Problema 2. Determinaţi toate perechile de numere naturale nenule (x, y) care verifică ecuaţia

$$x(x+2) = y^4 + y^2 + 2022.$$

Problema 3. Se dă triunghiul ABC cu $AC < AB < BC$ şi $\sphericalangle ACB = 60^\circ$ înscris în cercul k. Fie d_1 ş d_2 bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle BAC$, respectiv $\sphericalangle ABC$. Paralela prin A la BC intersectează d_2 în punctul B', iar paralela prin B la AC intersectează d_1 în punctul A'. Dacă dreapta $A'B'$ intersectează cercul k în punctele D şi E, demonstraţi că triunghiul CDE este isoscel.

Problema 4. Două triunghiuri isoscele având catetele de lungime 1 se lipesc astfel încât să formeze fie un triunghi dreptunghi având catetele de lungime $\sqrt{2}$, numit *formă T*, fie astfel încât să formeze un paralelogram de dimensiuni 1 şi $\sqrt{2}$ numit *formă P*. Determinaţi toate numerele naturale m şi n, cu $m, n \geq 2$, pentru care dreptunghiul $m \times n$ poate fi pavat cu forme T şi forme P.

Timp de lucru: 4 ore şi 30 de minute