Problema 1. Pentru fiecare număr natural nenul n, considerăm suma:

$$S_n = \left[\frac{1}{3}\right] + \left[\frac{2}{3}\right] + \ldots + \left[\frac{n}{3}\right].$$

a) Demonstraţi că oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$,

$$\left[\frac{n+1}{3}\right] + \left[\frac{n+2}{3}\right] + \left[\frac{n+3}{3}\right] = n + 1.$$

b) Determinaţi $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $S_n = 805$.

c) Determinaţi valorile lui $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care $S_n = \dfrac{(n-2)(n+1)}{6}$.

* * *

Soluţie. a) Fie $n = 3k + r$, cu $k \in \mathbb{N}$ şi $r \in \{0, 1, 2\}$. Obţinem:

$$E_n = E_{3k+r} = \left[\frac{n+1}{3}\right] + \left[\frac{n+2}{3}\right] + \left[\frac{n+3}{3}\right] = 3k + 1 + F_r,$$

unde $F_r = \left[\frac{r+1}{3}\right] + \left[\frac{r+2}{3}\right] + \left[\frac{r+3}{3}\right]$. Deoarece $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ şi $F_2 = 2$, obţinem $E_{3k} = 3k + 1$, $E_{3k+1} = 3k + 2$ şi $E_{3k+2} = 3k + 3$, deci $E_n = n + 1$.

b) Fie $S_0 = 0$. Avem $S_{n+3} = S_n + \left[\frac{n+1}{3}\right] + \left[\frac{n+2}{3}\right] + \left[\frac{n+3}{3}\right]$, şi din punctul a) deducem:

$$S_{n+3} = S_n + n + 1, \quad \text{pentru orice} \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Dând valori lui n în (1) şi adunând relaţiile membru cu membru obţinem $S_{3k} = \dfrac{k(3k-1)}{2}$, $S_{3k+1} = \dfrac{k(3k+1)}{2}$ şi $S_{3k+2} = \dfrac{3k(k+1)}{2}$, cu $k \in \mathbb{N}$. (2)
Ecuaţiile $S_{3k} = 805$ şi $S_{3k+2} = 805$ nu au soluţii întregi, iar din $S_{3k+1} = 805$ deducem $k = 23$ şi $n = 70$.

c) Folosim relaţiile (2). Fie $k \in \mathbb{N}$. Dacă $n = 3k$ sau $n = 3k+1$, atunci $S_n = \dfrac{n(n-1)}{6}$, iar dacă $n = 3k + 2$, atunci $S_n = \dfrac{(n-2)(n+1)}{6}$. Soluţiile sunt numerele $n = 3k + 2$, cu $k \in \mathbb{N}$.

Problema 2. Arătaţi că nu există $x \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $13x+1$ să fie cub perfect şi niciunul dintre numerele $13x+2, 13x+3, \ldots, 31x+1, 31x+2$ să nu fie cub perfect.

Mihaly Bencze

Soluţie. Presupunem că există $x \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $13x+1 = k^3$, cu $k \in \mathbb{N}^*$, iar $31x+2 < (k+1)^3$.

Cum $x = \dfrac{k^3-1}{13}$, obţinem $\dfrac{31(k^3-1)}{13} + 2 < k^3+3k^2+3k+1$, adică $18k^3-39k^2-39k-18 < 0$, ceea ce este echivalent cu $(k-3)(18k^2+15k+6) < 0$.

Deoarece pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$ avem $18k^2+15k+6 > 0$, obţinem $k < 3$. Dar $x \geqslant 1$, în consecinţă avem $k^3 = 13x+1 \geqslant 14$, deci $k \geqslant 3$, contradicţie. Aşadar nu există un astfel de x.

Problema 3. Fie numerele reale pozitive x, y, z, cu $x \geqslant 2\sqrt{2}$. Notăm cu w cel mai mic dintre numerele x, $\frac{2}{x}+y$, $\frac{3}{y}+z$, $\frac{4}{z}$. Determinaţi valoarea maximă a numărului w.

***

Soluţie. Pentru $x = 2\sqrt{2}$, $y = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ şi $z = \sqrt{2}$, obţinem

$$x = \frac{2}{x} + y = \frac{3}{y} + z = \frac{4}{z} = 2\sqrt{2},$$

aşadar valoarea maximă a lui w este mai mare sau egală cu $2\sqrt{2}$.

Presupunem că se poate ca $w > 2\sqrt{2}$, pentru anumite valori ale numerelor x, y, z. Rezultă că fiecare dintre numerele x, $\frac{2}{x}+y$, $\frac{3}{y}+z$, $\frac{4}{z}$ este mai mare decât $2\sqrt{2}$.

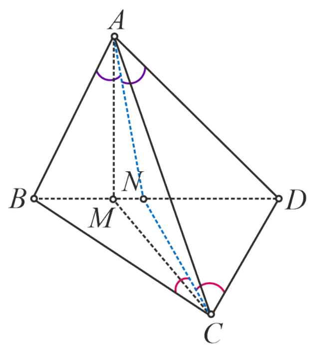
Din $\frac{4}{z} > 2\sqrt{2}$ obţinem că $z < \sqrt{2}$. Atunci, pentru ca $\frac{3}{y}+z > 2\sqrt{2}$, este necesar ca $\frac{3}{y} > \sqrt{2}$. Rezultă că $y < \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$. Deoarece avem $\frac{2}{x}+y > 2\sqrt{2}$, trebuie ca $\frac{2}{x} > 2\sqrt{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, adică este necesar ca $x < \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$, fals.

În consecinţă nu se poate ca $w > 2\sqrt{2}$. Aşadar valoarea maximă a lui w este $2\sqrt{2}$, şi se atinge pentru $x = 2\sqrt{2}$, $y = \frac{3\sqrt{2}}{2}$, $z = \sqrt{2}$.

Problema 4. Fie $ABCD$ un tetraedru cu $BC < CD$, $AC \perp BD$, $\sphericalangle BDC = 45°$ şi $(ABD) \perp (BCD)$. Dacă bisectoarele unghiurilor BAD şi BCD sunt concurente, calculaţi măsura unghiului ADC.

Dana şi Cristian Heuberger

Soluţie. Alegem $M, N \in BD$, astfel încât $AM \perp BD$, iar N este punctul de intersecţie al bisectoarelor unghiurilor BAD şi BCD.



BD este perpendiculară pe dreptele concurente AC şi AM, deci $BD \perp (AMC)$ şi cum $MC \subset (AMC)$, rezultă că $BD \perp MC$.

Desfăşurăm tetraedrul în jurul laturii BD. Deoarece $AM \perp BD$ şi $CM \perp BD$, după desfăşurare, punctele A, M şi C devin coliniare.

Folosind teorema bisectoarei, deducem:

$$\frac{AB}{AD} = \frac{BN}{DN} = \frac{CB}{CD}.$$

În consecinţă, după desfăşurare, punctele A şi C se află pe cercul lui Apollonius al segmentului BD relativ la punctul A. Acest cerc este cercul de diametru NN', unde $N' \in BD$ este piciorul bisectoarei exterioare a unghiului A al triunghiului BAD. Cum diametrul NN' este perpendicular pe coarda AC, rezultă că, după desfăşurare, punctul M devine mijlocul segmentului AC, deci BD devine mediatoarea segmentului AC. Rezultă că $AM = MC$ şi $AD = CD$. Deoarece $\sphericalangle BDC = 45°$, din triunghiul dreptunghic ADM rezultă că $AD = AM\sqrt{2} = CD$. Lungimile segmentelor AD, CD, AM şi CM nu s-au modificat prin desfăşurarea tetraedrului, aşadar în triunghiul AMC de dinainte de desfăşurare, cu $\sphericalangle AMC = 90°$, folosind teorema lui Pitagora, obţinem $AC = AM\sqrt{2}$. În consecinţă, triunghiul ACD este echilateral, deci $\sphericalangle ADC = 60°$.