Problema săptămânii 358

Arătaţi că pentru orice $a, b > 0$ are loc inegalitatea

$$\left(a^2+b+\frac{3}{4}\right)\left(b^2+a+\frac{3}{4}\right) \geq \left(2a+\frac{1}{2}\right)\left(2b+\frac{1}{2}\right).$$

Olimpiadă Belarus, 2005

Soluţia 1:

Deoarece $x^2+\frac{1}{4} \geq x, \forall x \in \mathbb{R}$ (revine la $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$), avem $a^2+b+\frac{3}{4} \geq a+b+\frac{1}{2} > 0$ şi $b^2+a+\frac{3}{4} \geq a+b+\frac{1}{2} > 0$, deci

$$\left(a^2+b+\frac{3}{4}\right)\left(b^2+a+\frac{3}{4}\right) \geq \left(a+b+\frac{1}{2}\right)^2.$$

Aşadar, este suficient să demonstrăm că

$$\left(a+b+\frac{1}{2}\right)^2 \geq \left(2a+\frac{1}{2}\right)\left(2b+\frac{1}{2}\right).$$

După desfacerea parantezelor, această inegalitate revine la $(a-b)^2 \geq 0$, care este evidentă.

Eglitatea are loc dacă şi numai dacă $a = b = \frac{1}{2}$.

Remarcă: (*Titu Zvonaru*)

Din această soluţie se vede că nu este necesar ca a, b să fie pozitive; este suficient ca $a+b+\frac{1}{2} \geq 0$. Din soluţia de mai jos se vede însă că inegalitatea este adevărată chiar în ipoteza şi mai slabă $a+b+1 \geq 0$.

Soluţia 2: (*Titu Zvonaru*)

Inegalitatea de demonstrat se poate rescrie echivalent

$$2(a+b+1)\big((2a-1)^2+(2b-1)^2+4(a-b)^2\big)+4(a-b)^2+(4ab-1)^2 \geq 0,$$

de unde inegalitatea rezultă imediat în ipoteza $a+b \geq -1$. În acest caz, sunt două cazuri de egalitate: $a = b = \frac{1}{2}$ şi $a = b = -\frac{1}{2}$.

Soluţia 3: (user *Medjl* pe AoPS)

Avem

$$\left(a^2+b+\frac{3}{4}\right)\left(b^2+a+\frac{3}{4}\right) \geq \left(a^2+a+\frac{3}{4}\right)\left(b^2+b+\frac{3}{4}\right) \geq \left(2a+\frac{1}{2}\right)\left(2b+\frac{1}{2}\right).$$

Prima inegalitate revine la $a^3+b^3 \geq a^2b+ab^2$, adică $(a-b)^2(a+b) \geq 0$, iar cea de-a doua foloseşte $x^2+\frac{1}{4} \geq x$ demonstrată la soluţia 1.

Soluția 4: (*Darius Chițu*)
Deoarece $a, b > 0$ o spargere a inegalității devine evidentă. Vom arăta că

$$a^2 + b + \frac{3}{4} \geq \sqrt{\left(2a + \frac{1}{2}\right)\left(2b + \frac{1}{2}\right)}, \quad \forall\, a, b > 0$$

Ridicând la pătrat și reordonând convenabil, inegalitatea de mai sus este echivalentă cu

$$f(b) = b^2 + \left(2a^2 - 4a + \frac{1}{2}\right) b + \left(a^4 + \frac{3}{2}a^2 - a + \frac{5}{16}\right) \geq 0$$

unde discriminantul expresiei de gradul II în variabila b este $\Delta_b = -16a^3 + 12a^2 - 1$. Este suficient ca $\Delta_b \leq 0$, $\forall\, a, b > 0$ pentru ca $f(b) \geq 0$, $\forall\, a, b > 0$. A mai rămas, deci, să demonstrăm că $16a^3 - 12a^2 + 1 \geq 0$, $\forall\, a > 0$. Dar aceasta se factorizează ca $\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 \left(a + \frac{1}{4}\right) \geq 0$, adevărat $\forall\, a > 0$. Alternativ, se poate folosi inegalitatea mediilor: $8a^3 + 8a^3 + 1 \geq 3\sqrt[3]{8a^3 \cdot 8a^3 \cdot 1} = 12a^2$.

În consecință, prima inegalitate propusă este adevărată. Se poate demonstra analog și că $b^2 + a + \frac{3}{4} \geq \sqrt{\left(2a + \frac{1}{2}\right)\left(2b + \frac{1}{2}\right)}$. Înmulțind prima și ultima inegalitate auxiliară, se obține rezultatul cerut. Egalitatea se obține pentru $a = b = 1/2$.

Am primit soluţii de la: *Titu Zvonaru, Alexandru Ciobotea, Marian Cucoaneş* şi de la *Darius Chiţu.*

Problem of the week no. 358

Let a, b be positive real numbers. Prove the inequality

$$\left(a^2 + b + \frac{3}{4}\right)\left(b^2 + a + \frac{3}{4}\right) \geq \left(2a + \frac{1}{2}\right)\left(2b + \frac{1}{2}\right).$$

Belarus, 2005

Solution 1:
As $x^2 + \frac{1}{4} \geq x, \forall\, x \in \mathbb{R}$ (it reduces to $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$), we have $a^2 + b + \frac{3}{4} \geq a + b + \frac{1}{2} > 0$ and $b^2 + a + \frac{3}{4} \geq a + b + \frac{1}{2} > 0$, hence

$$\left(a^2 + b + \frac{3}{4}\right)\left(b^2 + a + \frac{3}{4}\right) \geq \left(a + b + \frac{1}{2}\right)^2.$$

Thus, it is sufficient to prove that

$$\left(a + b + \frac{1}{2}\right)^2 \geq \left(2a + \frac{1}{2}\right)\left(2b + \frac{1}{2}\right).$$

After expanding, this inequality becomes $(a-b)^2 \geq 0$, which is obvious.
Equality holds if and only if $a = b = \dfrac{1}{2}$.

Remark: (*Titu Zvonaru*)
From this solution one can see that it is not necessary for a, b to be positive; it is sufficient that $a+b+\dfrac{1}{2} \geq 0$. The next solution shows that the inequality remains true even under the weaker constraint $a+b+1 \geq 0$.

Solution 2: (*Titu Zvonaru*)
The inequality can be written equivalently

$$2(a+b+1)\big((2a-1)^2+(2b-1)^2+4(a-b)^2\big)+4(a-b)^2+(4ab-1)^2 \geq 0,$$

which is true whenever $a+b \geq -1$. In this case, there are two equality cases: $a = b = \dfrac{1}{2}$ and $a = b = -\dfrac{1}{2}$.

Solution 3: (user *Medjl* pe AoPS)
We have

$$\left(a^2+b+\frac{3}{4}\right)\left(b^2+a+\frac{3}{4}\right) \geq \left(a^2+a+\frac{3}{4}\right)\left(b^2+b+\frac{3}{4}\right) \geq \left(2a+\frac{1}{2}\right)\left(2b+\frac{1}{2}\right).$$

The first inequality reduces to $a^3+b^3 \geq a^2b+ab^2$, i.e. $(a-b)^2(a+b) \geq 0$, while the second one uses $x^2+\dfrac{1}{4} \geq x$, as does solution 1.

Solution 4: (*Darius Chițu*)
We shall prove that

$$a^2+b+\frac{3}{4} \geq \sqrt{\left(2a+\frac{1}{2}\right)\left(2b+\frac{1}{2}\right)}, \quad \forall\, a, b > 0$$

Squaring and expanding, the inequality above becomes

$$f(b) = b^2+\left(2a^2-4a+\frac{1}{2}\right)b+\left(a^4+\frac{3}{2}a^2-a+\frac{5}{16}\right) \geq 0,$$

where the discriminant of the above quadratic expression in the variable b is $\Delta_b = -16a^3+12a^2-1$. It is sufficient to show that $\Delta_b \leq 0$, $\forall\, a, b > 0$ in order to have $f(b) \geq 0$, $\forall\, a, b > 0$. We need to prove that $16a^3-12a^2+1 \geq 0$, $\forall\, a > 0$. But this factorizes into $\left(a-\frac{1}{2}\right)^2\left(a+\frac{1}{4}\right) \geq 0$, true $\forall\, a > 0$. Alternatively, one can use the AM-GM inequality: $8a^3+8a^3+1 \geq 3\sqrt[3]{8a^3 \cdot 8a^3 \cdot 1} = 12a^2$.

Thus, our initial inequality is proven. Similarly, one gets $b^2+a+\frac{3}{4} \geq \sqrt{\left(2a+\frac{1}{2}\right)\left(2b+\frac{1}{2}\right)}$. Multiplying these two inequalities we get the desired one. Equality holds when $a = b = 1/2$.