Problema săptămânii 356

Vârfurile unui poligon convex cu $2n + 1$ laturi sunt colorate astfel încât vârfurile vecine sunt colorate cu culori diferite. Demonstraţi că, folosind diagonale care nu se intersectează în interior, poligonul se poate descompune în triunghiuri cu vârfurile diferit colorate.

Concursul Kürschák, 1978

Soluţie:
Observăm mai întâi că la colorarea poligonului s-au folosit cel puţin trei culori.
Demonstrăm prin inducţie după n afirmaţia:
Dacă vârfurile unui poligon convex cu n laturi are vârfurile colorate cu cel puţin 3 culori şi vârfurile vecine au culori diferite, atunci el se triangularizează în modul cerut.
Verificarea în cazul $n = 3$ este evidentă.
La pasul de inducţie distingem două cazuri:
• dacă o culoare apare o singură dată printre vârfuri, trag diagonalele din respectivul vârf;
• dacă fiecare culoare se repetă de cel puţin două ori, aleg trei vârfuri consecutive care au culori diferite (există!) şi îndepărtez triunghiul determinat de acestea; poligonul rămas are $n - 1$ vârfuri, şi îndeplineşte ipoteza de inducţie: vârfuri consecutive au culori diferite şi continuăm să avem prezente toate culorile (minim 3).
Potrivit ipotezei de inducţie, acest poligon poate fi triangularizat cu triunghiuri având vârfurile diferit colorate. Adăugând înapoi triunghiul îndepărtat anterior, obţinem o triangulare convenabilă a poligonului cu n laturi.

Problem of the week no. 356

The vertices of a polygon with $2n + 1$ sides are colored such that adjacent vertices get different colors. Prove that, by drawing some non-intersecting diagonals, one can decompose the polygon into triangles that have three different colors in their vertices.

Kürschák Competition, 1978

Solution:
Let us start by noting that one needs to use at least three colors, otherwise some two consecutive vertices will have the same color.
We prove by induction after n the following statement:
If the vertices of an n-gon are colored with at least 3 colors and neighboring vertices have different colors, then it can be triangulated as required.
Checking for $n = 3$ is obvious.
At the inductive step, we distinguish between two cases:
• if one color is used for only one vertex, we draw the diagonals from that vertex and this gives a convenient triangulation;
• if each color is used for at least two vertices, we pick three successive vertices that

have three different colors (they exist!) and we remove the triangle determined by these three points; we get an polygon with $n-1$ vertices that satisfies the inductive hypothesis: neighboring vertices have different colors and we have all colors (at least three) present. According to the inductive hypothesis, one can split this polygon into triangles with vertices having different colors. Adding to this triangulation the triangle we have removed earlier, we get a convenient triangulation of the initial n-gon.