Problema săptămânii 355

Determinaţi numerele naturale a, b, c pentru care $a^2b^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

Soluţia 1: Relaţia din enunţ se scrie echivalent $(a^2 - 1)(b^2 - 1) = c^2 + 1$.
Dacă a sau b este impar, rezultă că $4 \mid c^2 + 1$, adică $c^2 \equiv 3 \pmod 4$, ceea ce nu se poate.
Rămâne cazul în care a şi b sunt pare. Atunci fie $a = 0$, fie $a^2 - 1$ este pozitiv şi are (cel puţin) un divizor prim, $p \equiv 3 \pmod 4$. Dar, se ştie, dacă un asemenea număr prim divide o sumă de două pătrate, el divide fiecare din cele două pătrate. Deducem că $p \mid 1$, absurd. Cazul $a = 0$ conduce la unica soluţie $a = b = c = 0$.

Soluţia 2: Analizând modulo 4, constatăm uşor că singura posibilitate este ca a, b, c să fie toate pare. Înlocuind $a = 2a_1$, $b = 2b_1$, $c = 2c_1$ ajungem la ecuaţia $4a_1^2b_1^2 = a_1^2 + b_1^2 + c_1^2$. Din nou, analizând modulo 4, se vede că a_1, b_1, c_1 trebuie să fie pare şi, dacă $a_1 = 2a_2$, $b_1 = 2b_2$, $c_1 = 2c_2$, atunci a_2, b_2, c_2 trebuie să verifice ecuaţia $4^2a_2^2b_2^2 = a_2^2 + b_2^2 + c_2^2$. Continuând acest procedeu constatăm că a, b, c trebuie să fie divizibile cu orice putere a lui 2, deci trebuie să fie 0. Într-adevăr, $a = b = c = 0$ verifică ecuaţia.

Metoda descrisă mai sus este **metoda coborârii infinite a lui Fermat**.

Am primit soluţii de la: *David Tache, Ioan Viorel Codreanu* şi *Alexandru Ciobotea.*

Problem of the week no. 355

Find all non-negative integers a, b, c such that $a^2b^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

Solution 1: The equation can be written equivalently $(a^2 - 1)(b^2 - 1) = c^2 + 1$.
If a or b is odd, then $4 \mid c^2 + 1$, i.e. $c^2 \equiv 3 \pmod 4$, which is not possible.
That leaves us with the case when a and b are both even. In this case, we have either $a = 0$, or $a^2 - 1$ is positive and has (at least) one prime divisor $p \equiv 3 \pmod 4$. But, as it is well-known, if such a prime divides a sum of two squares, it divides each of the two squares. It follows that $p \mid 1$, which is absurd. The case $a = 0$ leads to the unique solution of the equation, $a = b = c = 0$.

Solution 2: Analyzing modulo 4, we find immediately that a, b, c must be even. Plugging $a = 2a_1$, $b = 2b_1$, $c = 2c_1$ into the initial equation, we get that a_1, b_1, c_1 must satisfy $4a_1^2b_1^2 = a_1^2 + b_1^2 + c_1^2$. Again, analyzing modulo 4, shows that a_1, b_1, c_1 must be even and if $a_1 = 2a_2$, $b_1 = 2b_2$, $c_1 = 2c_2$, then a_2, b_2, c_2 must satisfy the equation $4^2a_2^2b_2^2 = a_2^2 + b_2^2 + c_2^2$. Continuing this procedure, we find that a, b, c must be divisible by any power of 2, i.e. they must be 0. Indeed, $a = b = c = 0$ do satisfy the equation.

The method described above is **Fermat's method of infinite descent**.