Problema săptămânii 354

Fie a, b, c numere reale pozitive cu proprietatea că $ab + bc + ca = 3$. Arătaţi că

$$\frac{bc}{1+a^4} + \frac{ca}{1+b^4} + \frac{ab}{1+c^4} \geq \frac{3}{2}.$$

Olimpiadă Filipine, 2022

Soluţie: Avem $\frac{1}{1+a^4} = 1 - \frac{a^4}{1+a^4} \geq 1 - \frac{a^4}{2a^2} = 1 - \frac{a^2}{2}$ şi analoagele.

Înmulţind inegalitatea precedentă cu bc, avem

$$\frac{bc}{1+a^4} + \frac{ca}{1+b^4} + \frac{ab}{1+c^4} \geq bc - \frac{a^2bc}{2} + ca - \frac{ab^2c}{2} + ab - \frac{abc^2}{2} = 3 - \frac{abc(a+b+c)}{2},$$

deci este suficient să demonstrăm că $abc(a + b + c) \leq 3$.

Omogenizând, inegalitatea precedentă se scrie echivalent

$$abc(a+b+c) \leq 3 \cdot \left(\frac{ab+bc+ca}{3}\right)^2,$$

adică $3abc(a + b + c) \leq (ab + bc + ca)^2$, care este tocmai cunoscuta inegalitatea $3(xy + yx + zx) \leq (x + y + z)^2$ scrisă pentru numerele $x = ab$, $y = bc$, $z = ca$.

Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $a = b = c = 1$.

Comentariu: De unde ne vine ideea?

Uitându-ne la fracţiile din membrul stâng, prima idee care ne trece prin minte (după ce încercăm fără succes cu Titu) este să folosim că $1 + x^4 \geq 2x^2$. Dar asta minorează numitorii, deci majorează fracţiile, ori noi vrem, din contră, să le minorăm. De aici ideea de a folosi **Cauchy Reverse Technique** care presupune să:

- scădem din fiecare fracţie câte ceva până ce toate fracţiile devin negative
- să înmulţim (împărţim) inegalitatea cu un număr negativ astfel încât inegalitatea să fie iarăşi cu termeni pozitivi, dar cu sensul inegalităţii schimbat faţă de inegalitatea iniţială.

De obicei, pentru a ne asigura că după scădere fracţiile devin negative, cantitatea care se scade se alege în aşa fel încât fostul numărător să se reducă.

De exemplu, în inegalitatea de mai sus am fi putut să scădem din fracţiile din membrul stâng numerele bc, ca, respectiv ab, rescriind inegalitatea din enunţ în felul următor:

$$\left(\frac{bc}{1+a^4} - bc\right) + \left(\frac{ca}{1+b^4} - ca\right) + \left(\frac{ab}{1+c^4} - ab\right) \geq \frac{3}{2} - (bc + ca + ab),$$

adică (observaţi cum foştii numărători se reduc!)

$$\frac{-a^4bc}{1+a^4} + \frac{-b^4ca}{1+b^4} + \frac{-c^4ab}{1+c^4} \geq -\frac{3}{2}.$$

Înmulţim cu -1 şi inegalitatea de demonstrat se rescrie echivalent

$$\frac{a^4bc}{1+a^4}+\frac{b^4ca}{1+b^4}+\frac{c^4ab}{1+c^4}\leq\frac{3}{2}.$$

Spre deosebire de inegalitatea din enunţ, în aceasta putem folosi $a^4+1\geq 2a^2$ şi analoagele, şi continua ca în soluţia prezentată la început.

Puteţi încerca să demonstraţi cu această metodă inegalităţile:

Dacă a,b,c,d sunt numere reale pozitive, atunci

$$\frac{a^3}{a^2+b^2}+\frac{b^3}{b^2+c^2}+\frac{c^3}{c^2+d^2}+\frac{d^3}{d^2+a^2}\geq\frac{a+b+c+d}{2}.$$

Fie a,b,c numere reale pozitive cu proprietatea că $ab+bc+ca=3$. Arătaţi că

$$\frac{a^3(a+b)}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3(b+c)}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3(c+a)}{c^2+ca+a^2}\geq 2.$$

Am primit soluţii de la *Titu Zvonaru* şi *Ioan Viorel Codreanu.*

Problem of the week no. 354

Let a,b,c be positive real numbers such that $ab+bc+ca=3$. Prove that

$$\frac{bc}{1+a^4}+\frac{ca}{1+b^4}+\frac{ab}{1+c^4}\geq\frac{3}{2}.$$

The Philippine Mathematical Olympiad, 2022

Solution: We have $\dfrac{1}{1+a^4}=1-\dfrac{a^4}{1+a^4}\geq 1-\dfrac{a^4}{2a^2}=1-\dfrac{a^2}{2}$ and its analogues. Multiplying the previous inequality by bc, we have $\dfrac{bc}{1+a^4}+\dfrac{ca}{1+b^4}+\dfrac{ab}{1+c^4}\geq bc-\dfrac{a^2bc}{2}+ca-\dfrac{ab^2c}{2}+ab-\dfrac{abc^2}{2}=3-\dfrac{abc(a+b+c)}{2}$, therefore it is sufficient to prove that $abc(a+b+c)\leq 3$.
This can be written as

$$abc(a+b+c)\leq 3\cdot\left(\frac{ab+bc+ca}{3}\right)^2,$$

i.e. $3abc(a+b+c)\leq(ab+bc+ca)^2$, which is precisely the well known inequality $3(xy+yx+zx)\leq(x+y+z)^2$ written for $x=ab$, $y=bc$, $z=ca$.
Equality holds if and only if $a=b=c=1$.