Problema săptămânii 352

La o petrecere, gazda le arată celor n invitaţi colecţia sa extrem de numeroasă de căciuli. Toate căciulile sunt monocolore, având una din n culori date. Apoi, gazda îi pune în cap fiecărui invitat câte o căciulă. Niciun invitat nu vede culoarea propriei sale căciuli dar vede culorile căciulilor celorlalţi invitaţi. În fine, invitaţii trebuie să spună, simultan, ce culoare are căciula din capul lor. Dacă măcar unul din invitaţi ghiceşte corect culoarea căciulii sale, gazda, mărinimoasă, îi lasă pe invitaţi să plece acasă (cu căciuli cu tot), în caz contrar îi omoară pe toţi. Care este strategia pe care invitaţii o pot stabili înainte de a primi căciulile care le permite să mai meargă şi la alte petreceri pe viitor?

Soluţie:
O strategie care asigură salvarea invitaţilor este următoarea:
Numerotăm invitaţii $i_1, i_2, \ldots, i_n$ şi culorile $1, 2, \ldots, n$. Apoi, fiecare invitat i_k va presupune că suma că suma numerelor culorilor de pe cele n căciuli este congruentă cu k modulo n. Evident, presupunerea va fi corectă pentru exact unul dintre invitaţi. Fiecare invitat, văzând culorile căciulilor celorlalţi inivitaţi, va putea deduce culoarea propriei căciuli dacă stie valoarea, modulo n, a sumei numerelor ce corespund culorilor celor n căciuli. Invitatul a cărui presupunere este corectă îi va salva pe toţi (dacă nu greşeşte la calcule!).

Comentariu: Ideea rezolvării poate veni mai uşor dacă studiem problema mai întâi în cazul particular $n = 2$. Acolo e mai uşor de intuit că o strategie bună este ca unul dintre cei doi invitaţi să presupună că invitaţii poată căciuli de aceeaşi culoare, iar celălalt să presupună că ei poartă căciuli de culori diferite.

Problem of the week no. 352

At a party, the host shows to the n guests his numerous collection of hats. Each hat has one of n given colors. Next, the host puts a hat on the head of each guest so that no guest sees the color of his own hat, but sees the colors of the hats worn by the other guests. Finally, the guests must guess the color of their own hat, by simultaneously saying a color. If at least one guest guesses correctly, the guests may all go home and they can even keep the hats. Otherwise they are all killed. The guests may establish a strategy that allows them to stay alive before receiving the hats. What is such a strategy?

Solution:
A strategy that insures the salvation of the guest is the following one:
Label the guests $i_1, i_2, \ldots, i_n$ and the colors $1, 2, \ldots, n$. Next, each guest i_k is going to assume that the sum of the numbers corresponding to the colors of the n hats is congruent to k modulo n. Clearly, exactly one of the guests will be right. Each guest,

seeing the colors of the hats worn by the other guests, based on his assumption, will be able to deduce the color of his own hat. The one guest whose assumption is correct, will be able to guess correctly the color of his own hat, leading to the salvation of the whole party.

Comment: The idea of this proof comes more easily if one starts with the particular case $n = 2$. There, it is easier to see that one good strategy is for one of the two guests to assume that the colors of the hats worn by the guests are the same, while the other guest assumes the contrary to be true.