Problema săptămânii 351

Arătaţi că numărul soluţiilor (a,b,c,d,e), cu a,b,c,d,e numere naturale nenule, ale ecuaţiei $abcde = 5(abcd + abce + abde + acde + bcde)$ este impar.

Olimpiadă India, 2004

Soluţie:

Să începem prin a observa că numărul soluţiilor este finit. Ecuaţia de scrie

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{e} = \frac{1}{5}.$$

Datorită simetriei, putem deocamdată presupune $a \geq b \geq c \geq d \geq e$.
Evident, $e \leq 25$, deci avem de rezolvat un număr finit de ecuaţii de forma

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = k,$$

unde k este fixat pentru fiecare ecuaţie. La fel, pentru fiecare asemenea ecuaţie, $d = \min\{a,b,c,d\}$ poate lua numai un număr finit de valori, iar pentru fiecare d fixat se ajunge la o ecuaţie de forma

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = m,$$

cu m fixat, ecuaţie despre care, continuând în acelaşi mod, se arată că are un număr finit de soluţii. Aşadar, numărul total de soluţii este într-adevăr finit.
Să trecem acum la rezolvarea propriu zisă a problemei.

Numărul soluţiilor (a,b,c,d,e) cu $a \neq b$ este par deoarece oricărei soluţii (a,b,c,d,e) cu $a < b$ îi corespunde soluţia (a',b',c,d,e) unde $a' = b$ şi $b' = a$ în care $a' = b > a = b'$. Această corespondenţă este ,,unu la unu”, deci există la fel de multe soluţii cu $a < b$ ca şi soluţii cu $a > b$. La fel, numărul soluţiilor (a,b,c,d,e) cu $c \neq d$ este par, fiecărei soluţii cu $c < d$ corespunzându-i una cu $c > d$ obţinută din precedenta intervertind valorile lui c şi d.
Rămân de studiat soluţiile (a,b,c,d,e) cu $a = b$ şi $c = d$.
Să observăm că fiecărei soluţii (a,a,c,c,e) cu $a < c$ îi corespunde o soluţie (a',a',c',c',e) cu $a' = c > a = c'$ obţinută intervertind valorile lui a şi c, astfel că numărul soluţiilor de forma (a,a,c,c,e) cu $a \neq c$ este şi el par.
Ne rămâne să studiem soluţiile cu $a = c$. Soluţii de forma (a,a,a,a,e) ale ecuaţiei din enunţ sunt la fel de multe ca şi soluţii (a,e) ale ecuaţiei

$$\frac{4}{a} + \frac{1}{e} = \frac{1}{5},$$

adică ale ecuaţiei $20e + 5a = ae$. Aceasta se scrie $(a-20)(e-5) = 100$. Cum 100 are 9 divizori pozitivi, această ecuaţie are 9 soluţii cu $a - 20$ şi $e - 5$ pozitive. Ea nu are soluţii cu $a - 20$ şi $e - 5$ negative deoarece în acest caz $0 \leq 20 - a < 20$ şi $0 \leq 5 - e < 5$ implică $(20-a)(5-e) < 20 \cdot 5 = 100$. Aşadar, în cazul $a = b = c = d$ avem un număr impar de soluţii (anume 9), deci în total ecuaţia are un număr impar de soluţii.

Am primit soluţie de la *David Ştefan Tache*.

Problem of the week no. 351

Prove that the numbers of solutions, (a, b, c, d, e), in positive integers, of the equation $abcde = 5(abcd + abce + abde + acde + bcde)$ is odd.

Indian Olympiad, 2004

Solution:

Let us start by proving that the number of solutions is indeed finite. The equation ca be written as

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{e} = \frac{1}{5}.$$

Because of the symmetry we may assume, for now, that $a \geq b \geq c \geq d \geq e$.
Clearly, $e \leq 25$, therefore we have to solve finitely many equations of the form

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = k,$$

where k is fixed for each equation. Similarly, for each of these equations, $d = \min\{a, b, c, d\}$ can only take a finite number of values, and for each of these values of d, the equation reduces to an equation of the form

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = m,$$

with m some fixed rational number. Continuing this way, one can prove that all these equations have a finite number of solutions.
Hence, the total number of solutions of the initial equation is indeed finite.
Let us move to solving the problem itself.

The number of solutions (a, b, c, d, e) with $a \neq b$ is even because to each solution (a, b, c, d, e) with $a < b$ there is a corresponding solution (a', b', c, d, e) where $a' = b$ and $b' = a$ which satisfies $a' = b > a = b'$. This correspondence is ,,one to one", which means that there are equally many solutions with $a < b$ as solutions with $a > b$. Similarly, the number of solutions (a, b, c, d, e) with $c \neq d$ is even, because to each solution with $c < d$ there is a corresponding one with $c > d$ obtained from the previous one by swapping c and d.
Thus, we are left with the study of the solutions (a, b, c, d, e) with $a = b$ and $c = d$.
Notice that to each solution (a, a, c, c, e) with $a < c$ there is a corresponding solution (a', a', c', c', e) with $a' = c > a = c'$ obtained by swapping a and c, which means that the number of solutions of the form (a, a, c, c, e) with $a \neq c$ is also even.
Now we are left with only the solutions with $a = c$ to study. The solutions (a, a, a, a, e) of the initial equation are equally many as the solutions (a, e) of the equation

$$\frac{4}{a} + \frac{1}{e} = \frac{1}{5}.$$

The latter cam be written as $20e+5a = ae$, and then $(a-20)(e-5) = 100$. As 100 has 9 positive divisors, the last equation has 9 solutions with $a-20$ and $e-5$ both positive. There are no solutions with $a-20$ and $e-5$ both negative because in that case we would have $0 \le 20-a < 20$ and $0 \le 5-e < 5$ leading to $(20-a)(5-e) < 20\cdot 5 = 100$. Thus, in the case $a = b = c = d$ we have an odd number of solutions (namely 9), which means that in total we have an odd number of solutions.

The official solution can be found here, on page 5.