Problema săptămânii 350

Numberele reale positive a, b, c, d, e satisfac $abcde = 1$. Arătaţi că

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{d^2} + \frac{d^2}{e^2} + \frac{e^2}{a^2} \geq a + b + c + d + e.$$

Open Math Olympiad of the 239 Lyceum, Sankt Petersburg, 2013

Soluţie: Din inegalitatea (ponderată a) mediilor avem

$$4 \cdot \frac{a^2}{b^2} + 3 \cdot \frac{b^2}{c^2} + 2 \cdot \frac{c^2}{d^2} + \frac{d^2}{e^2} \geq 10 \sqrt[10]{\left(\frac{a^2}{b^2}\right)^4 \cdot \left(\frac{b^2}{c^2}\right)^3 \cdot \left(\frac{c^2}{d^2}\right)^2 \cdot \frac{d^2}{e^2}} = 10a$$

şi analoagele. Prin adunare şi împărţire la 10 obţinem inegalitatea din enunţ. Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $a = b = c = d = e = 1$.

Remarcă: Cum se putea găsi această spargere?
Se caută nişte ponderi $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 \in \mathbb{N}$ astfel încât scriind inegalitatea ponderată a mediilor, exponenţii la care apar variabilele b, c, d, e în membrul drept să fie egali:

$$p_1 \cdot \frac{a^2}{b^2} + p_2 \cdot \frac{b^2}{c^2} + p_3 \cdot \frac{c^2}{d^2} + p_4 \cdot \frac{d^2}{e^2} + p_5 \cdot \frac{e^2}{a^2} \geq$$

$$(p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5) \sqrt[p_1+\ldots+p_5]{\left(\frac{a^2}{b^2}\right)^{p_1} \cdot \left(\frac{b^2}{c^2}\right)^{p_2} \cdot \left(\frac{c^2}{d^2}\right)^{p_3} \cdot \left(\frac{d^2}{e^2}\right)^{p_4} \cdot \left(\frac{e^2}{a^2}\right)^{p_5}} =$$

$$(p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5) \sqrt[p_1+\ldots+p_5]{a^{2p_1-2p_5} b^{2p_2-2p_1} c^{2p_3-2p_2} d^{2p_4-2p_3} e^{2p_5-2p_4}}.$$

Intenţionăm să utilizăm condiţia $abcde = 1$ aşa încât alegem p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 astfel încât $2p_2 - 2p_1 = 2p_3 - 2p_2 = 2p_4 - 2p_3 = 2p_5 - 2p_4 = 2r$. Alegerea nu este unică (numerele p_5, p_4, p_3, p_2, p_1 trebuie doar să fie în progresie aritmetică). Avem atunci $p_2 = p_1 + r$, $p_3 = p_1 + 2r$, $p_4 = p_1 + 3r$ şi $p_5 = p_1 + 4r$, astfel că sub radical avem $a^{2p_1-2p_5} b^{2p_2-2p_1} c^{2p_3-2p_2} d^{2p_4-2p_3} e^{2p_5-2p_4} = a^{-8r}(bcde)^{2r} = a^{-10r}$. Pentru ca în membrul drept să obţinem în final a la puterea întâia, trebuie ca $-10r = p_1 + \ldots + p_5$, adică $-10r = 5p_1 + 10r$, deci $p_1 = -4r$. Putem, de exemplu, lua $r = -1$ şi atunci, $p_1 = 4$, $p_2 = 3$, $p_3 = 2$, $p_4 = 1$, $p_5 = 0$, obţinându-se rezolvarea de mai sus.

Remarcă: (*Titu Zvonaru*)
Inegalitatea rămâne adevărată şi dacă $abcde \leq 1$.

O generalizare a acestei probleme a fost dată la concursul **Stelele Matematicii** în 2019.

Am primit soluţii de la *Titu Zvonaru, Marian Cucoaneş* şi *David Ştefan Tache.*

Problem of the week no. 349

Positive real numbers a, b, c, d, e satisfy $abcde = 1$. Prove that

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{d^2} + \frac{d^2}{e^2} + \frac{e^2}{a^2} \geq a + b + c + d + e.$$

Open Math Olympiad of the 239 Lyceum, Sankt Petersburg, 2013

Solution: We apply the (weighted) AM-GM inequality to get

$$4\frac{a^2}{b^2} + 3\frac{b^2}{c^2} + 2\frac{c^2}{d^2} + \frac{d^2}{e^2} \geq 10a$$

and its analogues. Adding these inequalities and dividing by 10 gives the desired result.
Equality holds for $a = b = c = d = e = 1$.