Barajele de selecție a echipei Republicii Moldova pentru OBMJ 2023

2-4 mai 2023

Soluții

Problema BJ1. Numărul natural *n* verifică relația:

$$\frac{1}{1\cdot\left(\sqrt{2}+\sqrt{1}\right)+\sqrt{1}}+\frac{1}{2\cdot\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)+\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{n\cdot\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)+\sqrt{n}}=\frac{2022}{2023}.$$

Găsiți suma cifrelor numărului *n*.

Задача BJ1. Натуральное число *n* удовлетворяет соотношению:

$$\frac{1}{1\cdot\left(\sqrt{2}+\sqrt{1}\right)+\sqrt{1}}+\frac{1}{2\cdot\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)+\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{n\cdot\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)+\sqrt{n}}=\frac{2022}{2023}.$$

Найдите сумму цифр числа *n*.

Soluție. Notăm prin *S* suma din partea stângă a ecuației date. Fiecare termen al sumei *S* are forma

$$a_k=\frac{1}{k\cdot\left(\sqrt{k+1}+\sqrt{k}\right)+\sqrt{k}},$$

unde $k=1,2,\dots,n$.

Menționăm că pentru orice număr natural *k* avem

$$\sqrt{k+1}+\sqrt{k}=\frac{(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})}{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}=\frac{k+1-k}{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}=\frac{1}{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}.$$

Prin urmare,

$$a_k=\frac{1}{k\cdot\left(\sqrt{k+1}+\sqrt{k}\right)+\sqrt{k}}=\frac{1}{\frac{k}{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}+\sqrt{k}}=$$

$$\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{k+\sqrt{k+1}\cdot\sqrt{k}-k}=\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k+1}\cdot\sqrt{k}}=\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}.$$

Astfel, suma *S* se calculează astfel:

$$S=a_1+a_2+a_3+a_4+\cdots+a_{n-1}+a_n=\left(\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}\right)+$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{4}}-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)=$$

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\left(-\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{4}}\right)+\ ...+\left(-\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)-\frac{1}{\sqrt{n+1}}=$$

$$1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Din enunț rezultă că

$$S = 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{2022}{2023} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{1}{2023} \quad \Leftrightarrow \quad n+1 = 2023^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$n = 2023^2 - 1 = 2022 \cdot 2024 = 4092528\,.$$

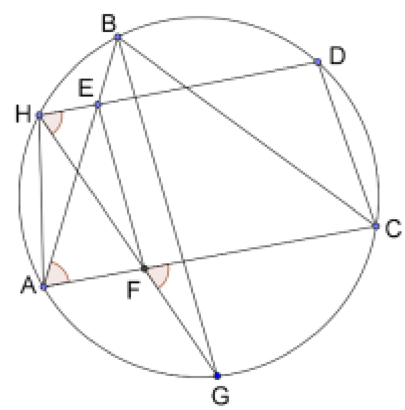
Astfel, $n = 4092528$.

Suma cifrelor numărului n este egală cu $4+0+9+2+5+2+8 = 30$. □

Problema BJ2. Fie Ω cercul circumscris triunghiului ascuțitunghic *ABC* și punctul *D*, situat pe arcul mic *BC* al acestui cerc. Punctele *E* și *F* sunt situate pe laturile *AB* și, respectiv *AC* astfel, încât patrulaterul *CDEF* este un paralelogram. Punctul *G* este situat pe arcul mic *AC* astfel, încât dreptele *DC* și *BG* sunt paralele. Demonstrați că unghiurile *GFC* și *BAC* sunt congruente.

Задача BJ2. Даны окружность Ω, описанная около остроугольного треугольника *ABC*, и точка *D*, расположенная на малой дуге *BC* этой окружности. Точки *E* и *F* расположены на сторонах *AB* и *AC* соответственно так, что четырёхугольник *CDEF* является параллелограммом. Точка *G* расположена на малой дуге *AC* так, что прямые *DC* и *BG* параллельны. Докажите, что углы *GFC* и *BAC* равны.

Soluție. Fie $DE \cap \Omega = \{D, H\}$. Unim *A* cu *H*. Patrulaterul *ACDH* este un trapez isoscel. Cum *CDEF* este un paralelogram, avem relațiile:



$$m(\angle EFA) = m(\angle DCA) = 180^0 - m(\angle DHA)$$
$$= 180^0 - m(\angle EHA).$$

Rezultă că patrulaterul *AFEH* este inscriptibil, adică *AFEH* este un trapez isoscel. Cum dreptele *DC* și *BG* sunt paralele, rezultă că arcele *BD* și *GC* sunt congruente, de unde se obțin relațiile:

$$m(\angle EHF) = m(\angle EAF) = m(\angle BAC) = m(\angle DHG) = m(\angle EHG).$$

Rezultă că punctele H, F și G sunt coliniare. Atunci avem egalitățile:

$$m(\angle GFC) = m(\angle GHE) = m(\angle FHE) = m(\angle EAF) = m(\angle BAC). \square$$

Problema BJ3. Demonstrați că numărul $A = 2024^{n+1} - 2023n - 2024$ are cel puțin 15 divizori naturali distincți, oricare ar fi numărul natural nenul *n*.

Задача BJ3. Докажите, что число $A = 2024^{n+1} - 2023n - 2024$ имеет не менее 15 различных натуральных делителей при любом натуральном ненулевом числе *n*.

Soluție. Pentru orice număr real *x* și orice număr natural nenul *n* este justă factorizarea

$$x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x^2 + x + 1). \qquad (1)$$

Dacă $x \neq 1$ este un număr întreg, atunci din (1) rezultă că numărul $(x-1)$ divide numărul (x^n-1). Atunci pentru numărul *A* și orice număr natural *n* sunt juste factorizările:

$$A = (2024^{n+1} - 2024) - 2023n = 2024 \cdot (2024^n - 1) - 2023 \cdot n =$$

$$2024 \cdot (2024-1) \cdot (2024^{n-1} + 2024^{n-2} + \ . \ . \ . + 2024^{\,2} + 2024 + 1) - 2023 \cdot n =$$

$$2023 \cdot (2024^n + 2024^{n-1} + \ . \ . \ . + 2024^{\,2} + 2024 - n) =$$

$$2023 \cdot [(2024^n - 1) + (2024^{n-1} - 1) + \ . \ . \ . + (2024^2 - 1) + (2024 - 1)\,] = 2023^2 \cdot B,$$

unde *B* este un număr natural. Astfel, numărul 2023^2 divide numărul *A*, oricare ar fi numărul natural nenul *n***.**

Dacă $D(A)$ reprezintă mulțimea tuturor divizorilor naturali distincți ai numărului *A*, iar $D(2023^2)$ reprezintă mulțimea tuturor divizorilor naturali distincți ai numărului 2023^2, atunci pentru numărul elementelor acestor mulțimi avem $Card(D(A)\,) \geq Card\big(D(2023^2)\big)$. Cum $2023 = 7 \cdot 17^2$, atunci $2023^2 = 7^2 \cdot 17^4$, iar $Card\big(D(2023^2)\big) = 3 \cdot 5 = 15$, de unde rezultă că $Card(D(A)\,) \geq 15$, adică numărul *A* are cel puțin 15 divizori naturali distincți, oricare ar fi numărul natural nenul *n*.□

Problema BJ4. Pe tablă sunt scrise trei numere reale (a, b, c). În cadrul unei *proceduri* se șterg aceste numere și în locul lor se scriu alte trei numere, de fiecare dată după una dintre următoarele două reguli: sau se scriu numerele (c, b, a), sau de fiecare dată se alege un număr real nenul d și se scriu numerele $(a, 2ad + b, ad^2 + bd + c)$.

1) Determinați dacă, pornind de la numerele $(1, -2, -1)$ scrise pe tablă, după un număr finit de proceduri consecutive se poate ajunge la numerele $(2, 0, -1)$.

2) Determinați dacă, pornind de la numerele $(1, -2, -1)$ scrise pe tablă, după un număr finit de proceduri consecutive se poate ajunge la numerele $(2, -1, -1)$.

Задача BJ4. На доске написаны три действительных числа (a, b, c). В рамках одной *процедуры* стираются эти числа и вместо них пишутся другие три числа, каждый раз по одному из следующих двух правил: или пишутся числа (c, b, a), или каждый раз выбирается некоторое действительное ненулевое число d и пишутся числа $(a, 2ad + b, ad^2 + bd + c)$.

1) Определите, если, начиная с написанных на доске чисел $(1, -2, -1)$, после некоторого конечного числа последовательных процедур можно дойти до чисел $(2, 0, -1)$.

2) Определите, если, начиная с написанных на доске чисел $(1, -2, -1)$, после некоторого конечного числа последовательных процедур можно дойти до чисел $(2, -1, -1)$.

Soluție. Asociem fiecărui triplet (a, b, c), scris pe tablă, trinomul pătrat $P(x) = ax^2 + bx + c$, al cărui discriminant este egal cu $D = b^2 - 4ac$.

Să arătăm că regulile procedurii din enunț nu schimbă valoarea numerică a discriminantului D. Într-adevăr, dacă asociem tripletului (c, b, a) trinomul pătrat $Q(x) = cx^2 + bx + a$, atunci discriminantul acestui trinom pătrat, de asemenea, este egal cu $D = b^2 - 4ac$.

Analog, dacă asociem tripletului $(a, 2ad + b, ad^2 + bd + c)$ trinomul pătrat $H(x) = ax^2 + (2ad + b)x + ad^2 + bd + c$, atunci și discriminantul acestui trinom pătrat, de asemenea, este egal cu

$$(2ad + b)^2 - 4a(ad^2 + bd + c) = 4a^2d^2 + 4abd + b^2 - 4a^2d^2 - 4abd - 4ac =$$

$$b^2 - 4ac = D.$$

1) Pentru tripletele $(1, -2, -1)$ şi $(2, 0, -1)$ avem

$$D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 8 = 0^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1).$$

Atunci prin aplicarea a trei proceduri din enunț avem

$$(1, -2, -1) \to (-1, -2, 1) \xrightarrow{d=-1} (-1, 0, 2) \to (2, 0, -1).$$

Astfel, pornind de la numerele $(1, -2, -1)$ scrise pe tablă, se poate ajunge după trei proceduri la numerele $(2,0, -1)$.

2) Pentru tripletul $(1, -2, -1)$ avem $D_1 = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 8$, iar pentru tripletul $(2, -1, -1)$ obținem $D_2 = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 9 \neq D_1$. Rezultă că, pornind de la numerele $(1, -2, -1)$ scrise pe tablă, nu se poate ajunge după un număr finit de proceduri la numerele $(2, -1, -1)$.□

Problema BJ5. Numerele naturale *a*, *b* și *c* reprezintă lungimile laturilor unui triunghi dreptunghic. Demonstrați că numărul *abc* se divide cu 60.

Задача BJ5. Натуральные числа *a*, *b* и *c* представляют длины сторон некоторого прямоугольного треугольника. Докажите, что число *abc* делится на 60.

Soluție. Fie numerele naturale *a*, *b* și *c* astfel încât $a^2 + b^2 = c^2$.

Vom arăta că produsul *abc* oricând este divizibil prin 3, 4 și 5, și, ca urmare, este divizibil prin 60.

1) Menționăm că restul de la împărțirea unui pătrat perfect cu 4 poate fi doar 0 sau 1.

Numerele a și b nu pot fi ambele impare. În caz contrar am avea $a^2 + b^2 \equiv 1 + 1 = 2 \ (mod\ 4)$, contradicție cu faptul că c^2 nu poate avea restul 2 la împărțirea cu 4.

Prin urmare, cel puțin unul dintre numerele *a* și *b* este par. Dacă ambele sunt pare, atunci produsul *abc* este divizibil prin 4.

Presupunem că *a* este par, iar *b* este impar. Atunci și *c* este impar.

Copiem egalitatea sub forma

$$a^2 = (c - b)(c + b).$$

Ambii factori $(c-b)$ și $(c+b)$ sunt numere pare.

Deoarece numerele b și c sunt impare, rezultă că restul la împărțirea lor cu 4 poate fi doar 1 sau 3. Dacă b și c au resturi egale modulo 4, atunci $(c-b)$ se divide cu 4, iar dacă b și c au resturi diferite modulo 4, atunci $(c+b)$ se divide cu 4. În ambele cazuri un factor se divide cu 2, iar altul cu 4, și, deci, produsul $(c-b)(c+b)$ este divizibil prin 8. Astfel, numărul a^2 este divizibil prin 8, cea ce implică faptul că a este divizibil prin 4.

Prin urmare, în orice situație posibilă, produsul *abc* se divide cu 4.

2) Menționăm că restul de la împărțirea unui pătrat perfect cu 3 poate fi doar 0 sau 1, deoarece $(3n \pm 1)^2 \equiv 1 \ (mod\ 3)$.

Dacă nici unul dintre numerele a, b și c nu este divizibil prin 3, atunci $a^2 + b^2 \equiv 1 + 1 = 2 \ (mod\ 3)$, iar $c^2 \equiv 1 \ (mod\ 3)$, contradicție.

Deci, cel puțin unul dintre numerele a, b și c este divizibil prin 3 și produsul *abc*, de asemenea, este divizibil prin 3.

3) Menționăm că restul de la împărțirea unui pătrat perfect cu 5 poate fi, doar 0, 1 sau 4, deoarece $(5n \pm 1)^2 \equiv 1 \ (mod\ 5)$ și $(5n \pm 2)^2 \equiv 4 \ (mod\ 5)$.

Dacă nici unul dintre numerele a, b și c nu este divizibil prin 5, atunci restul $a^2 + b^2 \ (mod\ 5)$ poate fi doar 0, 2, 3, iar restul $c^2 \ (mod\ 3)$ poate fi doar 1 sau 4, contradicție.

Deci, cel puțin unul dintre numerele a, b și c este divizibil prin 5 și produsul *abc*, de asemenea, este divizibil prin 5.

Prin urmare, produsul *abc* oricând este divizibil prin 60. □

Problema BJ6. Numerele reale a, b, c, cu $a \neq b$, verifică relațiile:

$$a^2(b+c) = b^2(a+c) = 2023.$$

Aflați valoarea numerică a expresiei $E = c^2(a+b)$.

Задача BJ6. Действительные числа a, b, c, где $a \neq b$, удовлетворяют соотношениям:

$$a^2(b+c) = b^2(a+c) = 2023.$$

Найдите числовое значение выражения $E = c^2(a+b)$.

Soluție. Avem

$$a^2(b+c) - b^2(a+c) = ab(a-b) + c \cdot (a^2 - b^2) = ab(a-b) + c \cdot (a-b)(a+b) =$$

$$(a-b) \cdot (ab + ac + bc) = 0 .$$

Cum $a - b \neq 0$, rezultă că $ab + ac + bc = 0$. Atunci

$$c^2(a+b)-a^2(b+c)=ac(c-a)+b(c^2-a^2)=(c-a)(ab+bc+ca)=0.$$

Rezultă că

$$c^2\cdot(a+b)=a^2(b+c)=2023.$$

Astfel, $E=c^2(a+b)=2023.$

Menționăm, că astfel de valori există, de exemplu, $a=t,\ b=2t,\ c=-\frac{2}{3}t$, unde $t=\sqrt[3]{\frac{3}{4}\cdot 2023}$.□

Problema BJ7. Fiecare punct al unui cerc este colorat sau în albastru, sau în galben, astfel încât există cel puțin câte un punct de fiecare culoare.

1) Demonstrați că pentru orice astfel de colorare a cercului oricând există un triunghi isoscel, înscris în acest cerc, cu toate vârfurile de aceeași culoare.

2) Demonstrați că pentru orice astfel de colorare a cercului oricând există un triunghi isoscel, înscris în acest cerc, cu vârfuri de ambele culori.

3) Determinați dacă pentru orice astfel de colorare a cercului oricând există un triunghi echilateral, înscris în acest cerc, cu toate vârfurile de aceeași culoare.

4) Determinați dacă pentru orice astfel de colorare a cercului oricând există un triunghi echilateral, înscris în acest cerc, cu vârfuri de ambele culori.

Задача BJ7. Каждая точка некоторой окружности закрашена либо в синий, либо в жёлтый цвет так, что имеются по не менее одной точки каждого цвета.

1) Докажите, что для любой такой раскраски окружности всегда найдётся равнобедренный треугольник, вписанный в эту окружность, со всеми вершинами одного цвета.

2) Докажите, что для любой такой раскраски окружности всегда найдётся равнобедренный треугольник, вписанный в эту окружность, с вершинами обоих цветов.

3) Определите, если для любой такой раскраски окружности всегда найдётся равносторонний треугольник, вписанный в эту окружность, со всеми вершинами одного цвета.

4) Определите, если для любой такой раскраски окружности всегда найдётся равносторонний треугольник, вписанный в эту окружность, с вершинами обоих цветов.

Soluție. 1) Considerăm un pentagon regulat *ABCDE* înscris în acest cerc. Conform principiului Dirichlet cel puțin trei vârfuri ale acestui pentagon sunt de aceeași culoare. Dintre aceste trei vârfuri, două neapărat sunt adiacente, de exemplu, *A* și *B*. Atunci oricare ar fi al treilea vârf de aceeași culoare, triunghiul respectiv (*ABC* sau *ABD* sau *ABE*) este isoscel (două laturi ale triunghiului sunt congruente ca laturi sau diagonale congruente ale pentagonului) cu toate vârfurile de aceeași culoare.

2) Fie punctele *A* și *B* de pe cerc, colorate diferit. Ducem mediatoarea segmentului *AB*. Notăm cu *C* unul dintre punctele de intersecție a acestei mediatoare cu cercul. Atunci triunghiul *ABC* este isoscel și are vârfuri de ambele culori.

3) Răspunsul este NU.

Să arătăm o colorare pentru care nu există un astfel de triunghi echilateral. Ducem în cerc un diametru *AB*. Colorăm toate punctele pe un semicerc în albastru, iar toate puncte de pe alt semicerc colorăm în galben, astfel încât punctele *A* și *B* să fie de culori diferite. Dacă triunghiul *MNP* are vârfurile de aceeași culoare pe acest cerc, atunci toate aceste vârfuri sunt plasate pe un semicerc. În acest caz un unghi al triunghiului *MNP* este neapărat obtuz (ca unghi înscris, care se sprijină pe un arc mai mare decât un semicerc). Deci, pentru această colorare nu există nici un triunghi echilateral, înscris în acest cerc, cu toate vârfurile de aceeași culoare. Prin urmare, afirmația din p. b) este falsă.

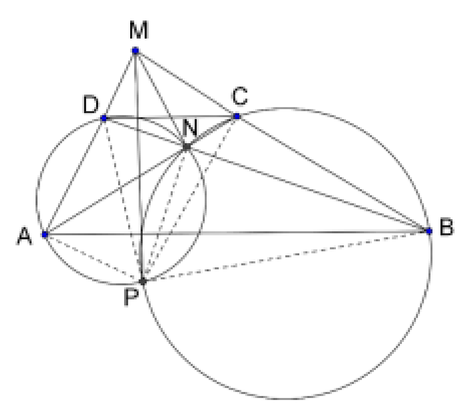
4) Răspunsul este NU.

Să arătăm o colorare pentru care nu există un astfel de triunghi echilateral. Luăm un triunghi echilateral *ABC*, înscris în cerc. Colorăm punctele *A*, *B* și *C* în albastru, iar toate celelalte puncte de pe cerc le colorăm în galben. Există un singur triunghi echilateral, înscris în cerc, cu un vârf în unul dintre cele trei puncte de culoare albastră (vârfurile triunghiului împart cercul în trei arce, fiecare de măsură 120^o). Și acesta este anume triunghiul *ABC*. Prin urmare, pentru această colorare nu există nici un triunghi echilateral, înscris în acest cerc, cu vârfurile de ambele culori.

Problema BJ8. Fie trapezul $ABCD$ cu bazele AB și CD $(AB > CD)$. Diagonalele AC și BD se intersectează în punctul *N*, iar dreptele *AD* și *BC* se intersectează în punctul *M*. Cercurile circumscrise triunghiurilor *ADN* și *BCN* se intersectează în punctul *P*, diferit de punctul *N*. Demonstrați că unghiurile *AMP* și *BMN* sunt congruente.

Задача BJ8. Пусть дана трапеция $ABCD$ с основаниями AB и CD $(AB > CD)$. Диагонали AC и BD пересекаются в точке *N*, а прямые *AD* и *BC* пересекаются в точке *M*. Окружности, описанные около треугольников *ADN* и *BCN*, пересекаются в точке *P*, отличной от точки *N*. Докажите, что углы *AMP* и *BMN* равны.

Soluție. Din cercul circumscris triunghiului *ADN* avem relațiile $m(\angle MAN) = m(\angle DAN) = m(\angle DPN)$. Vom arăta că patrulaterul *AMCP* este inscriptibil. Avem



$$m(\angle NPA) = 180^0 - m(\angle ADN) = m(\angle MDN),$$

$$m(\angle NPB) = 180^0 - m(\angle NCB) = m(\angle NCM),$$

$$m(\angle AMC) + m(\angle APC) =$$

$$m(\angle AMC) + m(\angle NPA) + m(\angle NPC) =$$

$$m(\angle DMB) + m(\angle MDB) + m(\angle DBM) = 180^0.$$

Analogic se arată că patrulaterul *BMDP* este inscriptibil.

Vom arăta că triunghiurile *MNA* și *DNP* sunt asemenea.

Cum punctul *P* aparține cercurilor circumscrise triunghiurilor *MAC* și *MBD*, obținem relațiile

$$m(\angle DMP) = m(\angle DBP) = m(\angle NBP) = m(\angle NCP),$$

$$m(\angle DPM) = m(\angle DBM) = m(\angle NBC) = m(\angle NPC).$$

Deci, triunghiurile *MDP* și *CNP* sunt asemenea. Din această asemănare obținem egalitatea $\frac{PD}{PN} = \frac{MD}{CN}$.

Aplicăm triunghiului *MAC* teorema lui Menelaus cu transversala $D - N - B$ și obținem relațiile

$$\frac{NA}{NC} = \frac{BM}{BC} \cdot \frac{DA}{DM} = \frac{AM}{AD} \cdot \frac{DA}{DM} = \frac{AM}{DM} \quad \Rightarrow \quad \frac{NA}{NC} = \frac{MA}{MD} \quad \Rightarrow \quad \frac{PD}{PN} = \frac{MD}{CN} = \frac{MA}{NA}.$$

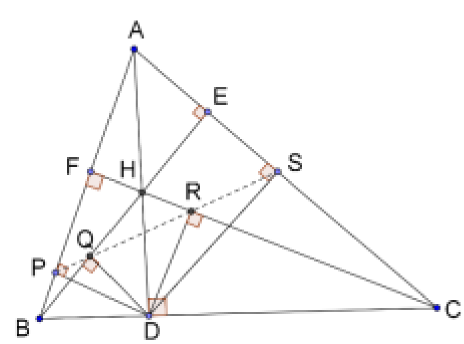
Cum $m(\angle MAN) = m(\angle DPN)$, rezultă că triunghiurile *MNA* și *DNP* sunt asemenea (LUL). Atunci avem congruențele

$$m(\angle NMA) = m(\angle NDP) = m(\angle BDP) = m(\angle BMP) \quad \Rightarrow \quad m(\angle AMP) = m(\angle BMN). \square$$

Problema BJ9. Fie triunghiul ascuțitunghic *ABC* cu ortocentrul *H*. Dreptele *AH*, *BH* și *CH* intersectează laturile *BC*, *AC* și *AB* în punctele *D*, *E* și, respectiv *F*. Fie P, Q, R și S picioarele perpendicularelor duse din punctul *D* la dreptele *BA*, *BE*, *FC* și, respectiv *AC*. Demonstrați că punctele P, Q, R și S sunt coliniare.

Задача BJ9. Дан остроугольный треугольник *ABC* с ортоцентром *H*. Прямые *AH*, *BH* и *CH* пересекают стороны *BC*, *AC* и *AB* в точках *D*, *E* и *F* соответственно. Пусть P, Q, R и S – основания перпендикуляров, проведенных из точки *D* на прямые *BA*, *BE*, *FC* и *AC*, соответственно. Докажите, что точки P, Q, R и S коллинеарны.

Soluție. Cum $m(\angle ADB) = m(\angle HDB) = m(\angle CFB) = m(\angle HFB) = 90^0$, rezultă că patrulaterul *DHFB* este inscriptibil. Analog sunt inscriptibile patrulaterele *DRHQ* și *BDQP*. Atunci avem relațiile



$$m(\angle HQR) = m(\angle HDR) = 90^0 - m(\angle DHR) =$$

$$90^0 - (180^0 - m(\angle FHD)) = m(\angle FHD) - 90^0 =$$

$$(180^0 - m(\angle FBD)) - 90^0 = 90^0 - m(\angle PBD) =$$

$$m(\angle BDP) = m(\angle BQP).$$

Cum unghiurile HQR și BQP sunt opuse la vârf, iar dreapta PQ separă punctele B și H, rezultă că punctele P, Q și R sunt coliniare. Analogic, prin aplicarea raționamentelor similare patrulaterului inscriptibil $DHEC$ obținem că punctele Q, R și S sunt, de asemenea, coliniare. Astfel, punctele P, Q, R și S sunt coliniare.□

Problema BJ10. Într-un turneu de șah au participat 100 de jucători. Fiecare jucător a jucat câte o partidă cu fiecare alt jucător. Într-o partidă de șah pentru victorie se acordă 1 punct, pentru înfrângere 0 puncte, iar în caz de remiză (egalitate) ambii jucători obțin câte 0,5 puncte. Ion a acumulat mai multe puncte decât oricare alt jucător. Mihai a pierdut doar o partidă, dar a acumulat mai puține puncte decât oricare alt jucător. Găsiți toate valorile posibile pe care le poate lua diferența dintre numărul de puncte acumulate de Ion și numărul de puncte acumulate de Mihai.

Задача BJ10. В некотором шахматном турнире участвовало 100 игроков. Каждый игрок сыграл по одной партии с каждым другим игроком. В шахматной партии за выигрыш присваивается 1 очко, за проигрыш 0 очков, а в случае ничьи оба игрока получают по 0,5 очков. Иван набрал больше очков, чем любой другой игрок. Михаил проиграл только одну партию, но набрал меньше очков, чем любой другой игрок. Найдите все возможные значения, которые может принять разность между количеством набранных Иваном очков и количеством набранных Михаилом очков.

Soluție. Fiecare jucător în turneu a jucat câte 99 de partide, iar în total în turneu au fost jucate $\frac{100\cdot 99}{2} = 4950$ de partide. În aceste partide au fost acordate în total 4950 de puncte (câte 1 punct în fiecare partidă).

Mihai a pierdut o partidă, iar celelalte 98 de partide a terminat cu victorie sau remiză. Prin urmare, Mihai a acumulat cel puțin $98 \cdot 0{,}5 = 49$ de puncte. Fiecare dintre toți ceilalți jucători au acumulat mai mult decât Mihai, adică cu cel puțin 0,5 puncte mai mult, deci, câte cel puțin 49,5 puncte. Deoarece Ion a acumulat cel mai multe puncte decât oricare alt jucător, adică cu cel puțin 0,5 puncte mai mult, el a acumulat cel puțin 50 de puncte.

În total, toți participanții au acumulat cel puțin $50 + 49 + 98 \cdot 49{,}5 = 4950$ de puncte. Dar exact acesta este numărul total de puncte acordate la turneu. Rezultă că Ion a acumulat exact 50 de puncte, Mihai a acumulat 49 de puncte, iar ceilalți 98 de jucători au acumulat fiecare câte 49,5 puncte.

O astfel de situație este posibilă, de exemplu, dacă Ion a câștigat partida cu Mihai, iar toate celelalte partide din turneu s-au terminat cu remize. Astfel se confirmă că Ion a acumulat $1 + 98 \cdot 0{,}5 = 50$ de puncte, Mihai a acumulat $98 \cdot 0{,}5 = 49$ de puncte, iar ceilalți 98 de jucători au acumulat fiecare câte $99 \cdot 0{,}5 = 49{,}5$ puncte.

Astfel, diferența dintre numărul de puncte acumulate de Ion și numărul de puncte acumulate de Mihai oricând este egală cu $50 - 49 = 1$.□

Problema BJ11. Găsiți toate tripletele de numere prime (x, y, z), care verifică ecuația

$$x^5 + y^3 - (x + y)^2 = 3z^3.$$

Задача BJ11. Найдите все тройки простых чисел (x, y, z), которые удовлетворяют уравнению

$$x^5 + y^3 - (x + y)^2 = 3z^3.$$

Soluție. Scriem ecuația din enunț astfel:

$$x^5 + y^3 - x^2 - 2xy - y^2 = 3z^3 \iff x^2(x^3 - 1) + y^2(y - 1) - 2xy = 3z^3 \iff$$
$$x^2(x - 1)(x^2 + x + 1) + y^2(y - 1) - 2xy = 3z^3. \qquad (1)$$

Cum numerele $x^2(x - 1)$ și $y^2(y - 1)$ includ produse de numere naturale consecutive, rezultă că ele sunt numere pare. Astfel, partea stângă a ecuației (1) este un număr par. Cum z^3 este un număr par, iar z este un număr prim, avem $z = 2$.

Scriem în acest caz ecuația (1) în forma

$$x^2(x^3 - 2) + y^2(y - 2) + (x - y)^2 - 24 = 0. \qquad (2)$$

Cum x, y sunt numere prime, rezultă că $x \geq 2, y \geq 2$, iar $(x - y)^2 \geq 0$. Avem două cazuri.

1) Dacă $x = 2$, atunci

$$0 = 2^2(2^3 - 2) + y^2(y - 2) + (2 - y)^2 - 24 = (y - 2)(y^2 + y - 2) = (y - 2)(y - 1)(y + 2).$$

Cum $y \geq 2$, rezultă că $y = 2$. Obținem soluția $(x, y, z) = (2, 2, 2)$.

2) Dacă $x \geq 3$, atunci $y^2(y - 2) + (x - y)^2 \geq 0$, iar

$$x^2(x^3 - 2) - 24 \geq 3^2 \cdot (3^3 - 2) - 24 = 9 \cdot 25 - 24 > 0.$$

Rezultă că în acest caz ecuația (2) nu are soluții.

Astfel, ecuația din enunț are unica soluție $(x, y, z) = (2, 2, 2)$.□

Problema BJ12. Numerele reale pozitive a, b, c satisfac relația $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Demonstrați inegalitatea

$$\frac{a^4 + 3ab^3}{a^3 + 2b^3} + \frac{b^4 + 3bc^3}{b^3 + 2c^3} + \frac{c^4 + 3ca^3}{c^3 + 2a^3} \leq 4.$$

Задача BJ12. Действительные положительные числа a, b, c удовлетворяют соотношению $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Докажите неравенство

$$\frac{a^4 + 3ab^3}{a^3 + 2b^3} + \frac{b^4 + 3bc^3}{b^3 + 2c^3} + \frac{c^4 + 3ca^3}{c^3 + 2a^3} \leq 4.$$

Soluție. Aplicând relația MA-MG pentru trei numere reale pozitive obținem următoarele relații:

$$a^3 + 2b^3 = a^3 + b^3 + b^3 \geq 3 \cdot \sqrt[3]{a^3 \cdot b^3 \cdot b^3} = 3ab^2 \implies \frac{1}{a^3 + 2b^3} \leq \frac{1}{3ab^2}, \quad (1)$$

$$b^3+2c^3=b^3+c^3+c^3\geq 3\cdot\sqrt[3]{b^3\cdot c^3\cdot c^3}=3bc^2 \quad\Longrightarrow\quad \frac{1}{b^3+2c^3}\leq\frac{1}{3bc^2}\ , \quad (2)$$

$$c^3+2a^3=c^3+a^3+a^3\geq 3\cdot\sqrt[3]{c^3\cdot a^3\cdot a^3}=3ca^2 \quad\Longrightarrow\quad \frac{1}{c^3+2a^3}\leq\frac{1}{3ca^2}\ . \quad (3)$$

Relațiile obținute (1), (2) și (3) implică următoarele relații

$$\frac{a^4+3ab^3}{a^3+2b^3}=\frac{a(a^3+2b^3)+ab^3}{a^3+2b^3}=a+\frac{ab^3}{a^3+2b^3}\leq a+\frac{ab^3}{3ab^2}=a+\frac{b}{3}\,, \quad (4)$$

$$\frac{b^4+3bc^3}{b^3+2c^3}=\frac{b(b^3+2c^3)+bc^3}{b^3+2c^3}=b+\frac{bc^3}{b^3+2c^3}\leq b+\frac{bc^3}{3bc^2}=b+\frac{c}{3}\,, \quad (5)$$

$$\frac{c^4+3ca^3}{c^3+2a^3}=\frac{c(c^3+2a^3)+ca^3}{c^3+2a^3}=c+\frac{ca^3}{c^3+2a^3}\leq c+\frac{ca^3}{3ca^2}=c+\frac{a}{3}\ . \quad (6)$$

Prin adunarea parte cu parte a relațiilor (4), (5) și (6) obținem

$$\frac{a^4+3ab^3}{a^3+2b^3}+\frac{b^4+3bc^3}{b^3+2c^3}+\frac{c^4+3ca^3}{c^3+2a^3}\leq 4\cdot\frac{a+b+c}{3}\leq 4\cdot\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}=4\,.$$

Inegalitatea este demonstrată.□