Selecţie juniori Turcia 2023
Barajul 1

1. Determinaţi toate tripletele (n, k, p) în care n şi k sunt numere întregi, p este număr prim, şi are loc relaţia
$$|6n^2 - 17n - 39| = p^k.$$

AoPS

2. Fie ABC un triunghi ascuţitunghic şi punctele K, L pe laturile AC, respectiv BC, astfel încât $\angle AKB = \angle ALB$. Punctul P este punctul de intersecţie a dreptelor AL şi BK, iar Q este mijlocul segmentului KL. Fie T şi S intersecţiile semidreptelor $(AL$, respectiv $(BK$, cu cercul circumscris triunghiului ABC. Demonstraţi că dreptele TK, SL şi PQ sunt concurente.

AoPS

3. Determinaţi funcţiile $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ care satisfac simultan următoarele două proprietăţi: $f(x + f(x)) = f(-x)$, $\forall, x \in \mathbb{R}$ şi $f(x) \leq f(y)$ pentru oricare două numere reale x, y cu $x \leq y$.

AoPS

4. Iniţial, Asli distribuie 1000 de mingi în 30 de cutii, ea fiind cea care decide cum anume face distribuirea mingilor. După aceea, Asli şi Zehra fac mutări alternative, prima mutare făcând-o Asli O mutare constă din alegerea unei cutii care conţine măcar o minge şi îndepărtarea unei mingi din cutia aleasă. Jucătorul care scoate ultima minge dintr-o cutie păstrează respectiva cutie. Care este numărul maxim de cutii pe care şi-l poate asigura Asli indiferent de mutările Zehrei?

AoPS

Barajul 2

5. Demonstraţi că, pentru orice numere reale pozitive a, b, c are loc inegalitatea
$$\frac{a^4+1}{b^3+b^2+b} + \frac{b^4+1}{c^3+c^2+c} + \frac{c^4+1}{a^3+a^2+a} \geq 2.$$

AoPS

6. În 33 dintre pătrăţelele unitate ale unei table 10×10 se aşază câte o pietricică. După aceea, în fiecare dintre pătrăţelele unitate care nu conţin pietricele, se scrie numărul de pietricele aflate pe aceeaşi linie sau aceeaşi coloană cu pătrăţelul respectiv. (În pătrăţelulunitate de pe linia ℓ, coloana c, dacă acesta nu conţine pietricel, se scrie suma dintre numărul total de pietricele de pe linia ℓ şi numărul total de pietricele

de pe coloana c.) Care este valoarea maximă a sumei tuturor numerelor scrise pe tablă?

AoPS

7. Fie ABC un triunghi şi fie $D \in AB$, $E \in AC$ astfel ca $DE \parallel BC$. Cercul circumscris triunghiului ABC intersectează a doua oară cercurile circumscrise triunghiurilor BDE şi CDE în punctele K, respectiv L. Dreptele BK şi CL se intersectează în T. Arătaţi că dreapta TA este tangentă cercului circumscris triunghiului ABC.

AoPS

8. Fie p un număr prim. Este posibil ca numărul de numere naturale n pentru care expresia

$$\frac{n^3 + np + 1}{n + p + 1}$$

este un număr întreg, să fie 777?

AoPS