Problema săptămânii 347

Pentru orice număr natural nenul m, notăm cu $d(m)$ numărul divizorilor săi pozitivi.
Pentru $n \in \mathbb{N}^*$, construim următorul şir: $x_1 = d(n)$, apoi $x_{k+1} = d(x_k)$, $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$.
De exemplu, pentru $n = 24 = 2^3 \cdot 3$ şirul construit va fi:
$x_1 = 8 = 2^3$, $x_2 = 4 = 2^2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 2$, $x_5 = 2$, $\ldots$.
Determinaţi mulţimea numerelor naturale nenule n pentru care şirul $x_1, x_2, x_3, \ldots$ nu conţine niciun pătrat perfect.

baraj juniori Turcia, 2021

Soluţie:
Începem prin a observa că $d(1) = 1$, $d(2) = 2$ şi $d(n) < n$ pentru orice $n \geq 3$. Întradevăr, mulţimea divizorilor lui n este inclusă în $\{1, 2, \ldots, n\}$, deci $d(n) \leq n$. Dacă $d(n) = n$ atunci toate numerele mai mici decât n sunt divizori ai lui n, în particular $n - 1$ divide n (dacă $n \geq 2$). Deducem că egalitatea $d(n) = n$ are loc numai pentru $n = 1$ şi $n = 2$.
Aşadar, vom avem $x_1 > x_2 > x_3 > \ldots$ câtă vreme $x_k > 2$. Dar un şir de numere naturale nu poate descreşte la nesfârşit, deci la un moment dat vom avea $x_k = 1$ sau $x_k = 2$.
Dacă $x_k = d(x_{k-1}) = 1$, atunci $x_{k-1} = 1$, deci la 1 se va ajunge numai pornind de la 1. Cum 1 este pătrat perfect, $n = 1$ nu convine.
Evident $n = 2$ convine, deoarece pentru $n = 2$ se obţine şirul constant egal cu 2, care nu conţine pătrate perfecte. Considerăm de-acum $n > 2$.
Dacă pentru un $n > 2$ se ajunge la $x_k = d(x_{k-1}) = 2$, atunci x_{k-1} este un număr prim impar. Dacă $x_{n-1} = p$, număr prim impar, atunci x_{n-2}, dacă există, este un q^{p-1}, adică un pătrat perfect. Aşadar, singurele numerele n pentru care şirul nu conţine pătrate perfecte sunt cele construite pentru $n = q^{p-1}$, unde p şi q sunt numere prime oarecari.

Am primit soluţii de la *David Tache* şi *Alexandru Ciobotea*.

Problem of the week no. 347

For any positive integer m, denote by $d(m)$ the number of its positive divisors.
For $n \in \mathbb{N}$, we define the following sequence: $x_1 = d(n)$, then $x_{k+1} = d(x_k)$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$.
For example, for $n = 24 = 2^3 \cdot 3$ the sequence will be:
$x_1 = 8 = 2^3$, $x_2 = 4 = 2^2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 2$, $x_5 = 2$, $\ldots$.
Determine the set of all positive integers n for which the sequence $x_1, x_2, x_3, \ldots$ does not contain perfect squares.

Turkish JTST, 2021

Solution:
We start by noticing that $d(1) = 1$, $d(2) = 2$ and $d(n) < n$ for all $n \geq 3$. Indeed, the

set of positive divisors of n is a subset of $\{1, 2, \ldots, n\}$, hence $d(n) \leq n$. If $d(n) = n$ then all the numbers that are less than n are divisors of n, in particular $n-1$ divides n (if $n \geq 2$). We deduce that the equality $d(n) = n$ holds only when $n = 1$ and $n = 2$. Thus, we have $x_1 > x_2 > x_3 > \ldots$ as long as $x_k > 2$. But a sequence of positive integers can not be strictly decreasing, so at some point one must get to either $x_k = 1$ or $x_k = 2$.

If $x_k = d(x_{k-1}) = 1$, then $x_{k-1} = 1$, so one one gets to 1 only by starting from $n = 1$. As 1 is a perfect square, $n = 1$ does not satisfy the condition.

Clearly $n = 2$ does satisfy it because from $n = 2$ one gets the constant sequence 2, which does not contain any squares. Consider $n > 2$.

If, for $n > 2$, one gets to $x_k = d(x_{k-1}) = 2$, then x_{k-1} is an odd prime. If $x_{n-1} = p$, an odd prime, then x_{n-2}, in case it exists, is of the form q^{p-1}, i.e. a perfect square. Thus, the only numbers n for which the sequence does not contain any perfect squares are those constructed for $n = q^{p-1}$, where p and q are arbitrary primes.