ViitoriOlimpici.ro

Problema 1
Etapa 6
Clasa a VIII-a

Problema 1. Pe muchiile AB, $A'B'$ şi $C'D'$ ale cubului $ABCDA'B'C'D'$ de latură a se consideră punctele M, N, respectiv P, astfel încât $MB = x$, $NB' = y$, $PC' = z$, iar $y > x + z$.

a) Determinaţi numărul laturilor poligonului de secţiune determinat de intersecţia cubului cu planul (MNP).

b) Dacă $MB = \dfrac{a}{6}$, $NB' = \dfrac{2a}{3}$ şi $PC' = \dfrac{a}{3}$, calculaţi aria poligonului de secţiune determinat de intersecţia cubului cu planul (MNP).

Problema 2.

a) Fie $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ distincte, astfel încât $2 \cdot |a-b| = 3 \cdot |b-c| = 4 \cdot |c-d|$. Arătaţi că $a+b \neq c+d$.

b) Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ şi numerele reale $x_1, x_2, \ldots, x_{2n}$ cu proprietatea:

$$2 \cdot |x_1 - x_2| = 3 \cdot |x_2 - x_3| = \ldots = 2^n \cdot \left|x_{2n-1} - x_{2n}\right| = (2^n + 1) \cdot |x_{2n} - x_1|.$$

Demonstraţi că $x_1 = x_2 = \ldots = x_{2n}$.

Problema 3. Fie $ABCD$ un tetraedru regulat de latură a şi punctele $M, N \in (AB)$, $P, Q \in (CD)$, astfel încât $MN = \frac{a}{2}$ şi $\frac{AM}{CQ} = \frac{MN}{QP} = \frac{NB}{PD}$.

Se consideră planele α, β, astfel încât $MP \subset \alpha$, $NQ \subset \beta$, $\alpha \parallel \beta$, $\alpha \cap BD = \{R\}$ şi $\beta \cap BD = \{S\}$. Demonstraţi că:

a) punctele R şi S se află pe latura BD;

b) $\frac{a}{3} < RS < a$.

Problema 4
Etapa 6
Clasa a VIII-a

Problema 4. Se consideră numerele strict pozitive $a, b, c, d,$ astfel încât $a+b+c+d=16$. Demonstraţi că

$$\frac{1}{a+a^3}+\frac{1}{b+b^3}+\frac{1}{c+c^3}+\frac{1}{d+d^3} \geqslant \frac{1}{17}.$$