Problema 1. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia:

$$\sqrt{17x^2-25y^2+68x+20y+55}+\sqrt{9y^2-17x^2-12y-68x-56}=z.$$

***

Soluţie. Din $17x^2-25y^2+68x+20y+55 \geqslant 0$ rezultă

$$25y^2-20y-55 \leqslant 17x^2+68x \tag{1}$$

Din $9y^2-17x^2-12y-68x-56 \geqslant 0$ rezultă

$$17x^2+68x \leqslant 9y^2-12y-56 \tag{2}$$

Din (1) şi (2) rezultă $25y^2-20y-55 \leqslant 9y^2-12y-56$, deci $(4y-1)^2 \leqslant 0$. În consecinţă, $y=\dfrac{1}{4}$. Înlocuind y în (2) şi (1), obţinem:

$$17x^2+68x \leqslant -\frac{935}{16} \leqslant 17x^2+68x.$$

Aşadar $4x^2+64x+55=0$, de unde obţinem soluţiile $x_1=-\dfrac{11}{4}$, $x_2=-\dfrac{5}{4}$.

În oricare dintre situaţii, au loc egalităţile:

$$17x^2+68x=25y^2-20y-55=9y^2-12y-56$$

şi de aici rezultă că $z=0$.

Problema 2. Se consideră planele perpendiculare α şi β şi dreptele necoplanare d şi g, astfel încât $\alpha \cap \beta = d$, $g \cap \alpha = \{A\}$ şi $g \cap \beta = \{B\}$. Fie A' proiecţia lui A pe dreapta d şi B' proiecţia lui B pe dreapta d. Notăm cu a şi b măsurile unghiurilor dintre dreapta g şi planul α, respectiv dintre dreapta g şi planul β. Dacă $AB = 2k > 0$, iar unghiul dintre dreptele d şi g este de $60°$, calculaţi $\cos^2 a + \cos^2 b$.

***

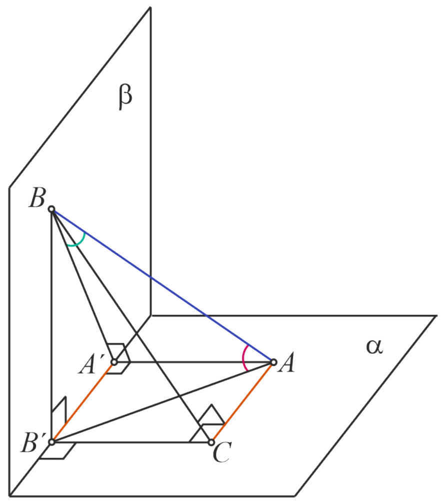
Soluţie. Alegem punctul C în planul α, astfel încât $AA'B'C$ este dreptunghi. Rezultă că $\sphericalangle(AB, A'B') = \sphericalangle BAC = 60°$.

Folosind teorema celor trei perpendiculare, din $BB' \perp \alpha$, $B'C \perp AC$, $AC, B'C \subset \alpha$, rezultă că $BC \perp AC$, aşadar triunghiul ABC este dreptunghic cu un unghi de $60°$. În consecinţă $A'B' = AC = \dfrac{AB}{2} = k$.

$BB' \perp \alpha$, aşadar avem $\sphericalangle BB'A = 90°$ şi $a = \sphericalangle(AB, \alpha) = \sphericalangle BAB'$.

$AA' \perp \beta$, aşadar rezultă $\sphericalangle AA'B = 90°$ şi $b = \sphericalangle(AB, \beta) = \sphericalangle ABA'$.

Obţinem:



$$\cos^2 a + \cos^2 b = \frac{B'A^2}{AB^2} + \frac{A'B^2}{AB^2} = \frac{A'B'^2 + A'A^2 + A'B^2}{AB^2} = \frac{A'B'^2 + AB^2}{AB^2} = \frac{5}{4}.$$

Problema 3. Fie ABC un triunghi oarecare, cu $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ şi $p = \dfrac{a+b+c}{2}$. Arătaţi că:

a) $\dfrac{p-a}{p-c} + \dfrac{p-b}{p-a} + \dfrac{p-c}{p-b} - \dfrac{p-a}{b} - \dfrac{p-b}{c} - \dfrac{p-c}{a} \geqslant \dfrac{2p^2}{a^2+b^2+c^2}$.

b) triunghiul ABC este echilateral, dacă şi numai dacă are loc egalitatea $\dfrac{p-a}{p-c} + \dfrac{p-b}{p-a} + \dfrac{p-c}{p-b} - \dfrac{p-a}{b} - \dfrac{p-b}{c} - \dfrac{p-c}{a} = \dfrac{2p^2}{a^2+b^2+c^2}$.

Cristian Heuberger

Soluţie. a) Notăm cu E membrul stâng al inegalităţii. Avem:

$$\frac{p-a}{p-c} - \frac{p-a}{b} = (p-a)\left(\frac{1}{p-c} - \frac{1}{b}\right) = (p-a)\frac{b+c-p}{b(p-c)} = \frac{(p-a)^2}{b(p-c)}$$

şi relaţiile analoage. Folosind inegalitatea lui Bergström, obţinem:

$$E = \frac{(p-a)^2}{b(p-c)} + \frac{(p-b)^2}{c(p-a)} + \frac{(p-c)^2}{a(p-b)} \geqslant \frac{(p-a+p-b+p-c)^2}{b(p-c)+c(p-a)+a(p-b)} = \frac{2p^2}{a^2+b^2+c^2}.$$

b) Implicaţia de la stânga la dreapta rezultă prin calcul direct.

Fie un triunghi ABC pentru care are loc egalitatea din enunţ.

Din inegalitatea lui Bergström ştim că pentru orice $x, y, z \in \mathbb{R}$ şi $a, b, c > 0$, avem $\dfrac{x^2}{a} + \dfrac{y^2}{b} + \dfrac{z^2}{c} \geqslant \dfrac{(x+y+z)^2}{a+b+c}$, iar egalitatea are loc dacă şi numai dacă $\dfrac{x}{a} = \dfrac{y}{b} = \dfrac{z}{c}$.

În cazul nostru, pentru a exista egalitatea, trebuie să avem:

$$\frac{p-a}{b(p-c)} = \frac{p-b}{c(p-a)} = \frac{p-c}{a(p-b)}.$$

Aplicând proprietatea şirului de rapoarte egale, rezultă:

$$\frac{p-a}{b(p-c)} = \frac{p-b}{c(p-a)} = \frac{p-c}{a(p-b)} = \frac{a+b+c}{a^2+b^2+c^2}.$$

Din $\dfrac{p-a}{b(p-c)} = \dfrac{a+b+c}{a^2+b^2+c^2}$ deducem $\dfrac{-a+b+c}{b(a+b-c)} = \dfrac{a+b+c}{a^2+b^2+c^2}$, deci $\dfrac{-a+b+c}{b} = \dfrac{(a+b)^2-c^2}{a^2+b^2+c^2}$, adică $1 + \dfrac{c-a}{b} = 1 + \dfrac{2ab-2c^2}{a^2+b^2+c^2}$.

Aşadar avem $\dfrac{c-a}{b} = \dfrac{2ab-2c^2}{a^2+b^2+c^2}$ şi relaţiile analoage.

Deducem că $c-a$ şi $ab-c^2$ au acelaşi semn. (1). Similar, obţinem:

$$a-b \text{ şi } bc-a^2 \text{ au acelaşi semn} \quad (2)$$

$$b-c \text{ şi } ca-b^2 \text{ au acelaşi semn.} \quad (3).$$

Dacă $a < b$ şi $a < c$, atunci $a - b < 0$ şi $bc - a^2 > 0$, ceea ce contrazice (2). Aşadar a nu este cea mai mică dintre laturi. Analog deducem că nici b nici c nu sunt cele mai mici laturi. Rezultă că cel puţin două laturi sunt egale. Dacă $a = b$, atunci $a - b = 0$, rezultând $bc - a^2 = 0$, deci $c = a$. Analog în celelalte cazuri.

Problema 4. Rezolvaţi în mulţimea numerelor naturale ecuaţia:

$$\left[\sqrt{\sqrt{1}\cdot\sqrt{2}}\right]+\left[\sqrt{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}\right]+\ldots+\left[\sqrt{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n+1}}\right]=2023.$$

***

Soluţie. Fie $p\in\mathbb{N}^*$. Pentru fiecare număr natural k astfel încât $p^2\leqslant k<(p+1)^2$, avem: $p^2\leqslant k<\sqrt{k}\cdot\sqrt{k+1}<k+1\leqslant(p+1)^2$, deci

$$p<\sqrt{\sqrt{k}\cdot\sqrt{k+1}}<p+1.$$

Aşadar $\left[\sqrt{\sqrt{k}\cdot\sqrt{k+1}}\right]=p$, pentru $2p+1$ valori ale lui k.

Rezultă: $\left[\sqrt{\sqrt{1}\cdot\sqrt{2}}\right]=\left[\sqrt{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}\right]=\left[\sqrt{\sqrt{3}\cdot\sqrt{4}}\right]=1,$

$$\left[\sqrt{\sqrt{4}\cdot\sqrt{5}}\right]=\left[\sqrt{\sqrt{5}\cdot\sqrt{6}}\right]=\left[\sqrt{\sqrt{6}\cdot\sqrt{7}}\right]=\left[\sqrt{\sqrt{7}\cdot\sqrt{8}}\right]=\left[\sqrt{\sqrt{8}\cdot\sqrt{9}}\right]=2$$

şi relaţiile analoage.

Pentru $n\in\mathbb{N}^*$, fie $m\in\mathbb{N}^*$, cu $m^2\leqslant n<(m+1)^2$. Ecuaţia devine:

$$1\cdot(2\cdot1+1)+2\cdot(2\cdot2+1)+\ldots+(m-1)(2\cdot(m-1)+1)+m\cdot s=2023,$$

unde $s=n-m^2\in\{0,1,2,\ldots,2m-2\}$. Obţinem succesiv:

$$2\cdot1^2+1+2\cdot2^2+2+\ldots2\cdot(m-1)^2+(m-1)+m\cdot s=2023,$$

$$2\cdot\left(1^2+2^2+\ldots+(m-1)^2\right)+(1+2+\ldots+(m-1))+m\cdot s=2023,\quad(*)$$

$$2\cdot\frac{(m-1)\cdot m\cdot(2(m-1)+1)}{6}+\frac{m(m-1)}{2}+m\cdot s=2023,$$

$$2m(m-1)(2m-1)+3m(m-1)+6ms=6\cdot2023.\qquad(**)$$

Deducem că m este divizor al numărului $6\cdot2023=2\cdot3\cdot7\cdot17^2$.
Deoarece $2m(m-1)(2m-1)<6\cdot2023$, rezultă că $m\in\{1,2,3,6,7,14\}$.
Fiindcă $s\leqslant2m-2$, obţinem:

$$2m(m-1)(2m-1)+3m(m-1)+6m(2m-2)\geqslant6\cdot2023,$$

deci $m(m-1)(4m+13)\geqslant6\cdot2023$, de unde rezultă că $m>7$. Aşadar $m=14$.
Înlocuind $m=14$ în $(**)$, obţinem $s=21$ şi apoi $n=217$.

Observaţie: Valoarea lui s se poate afla din ecuaţia $(*)$ prin înlocuiri ale lui m cu valori naturale, până când membrul stâng devine egal cu 2023.