Problema 1
Etapa 5
Clasa a VIII-a

Problema 1. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia:

$$\sqrt{17x^2 - 25y^2 + 68x + 20y + 55} + \sqrt{9y^2 - 17x^2 - 12y - 68x - 56} = z.$$

Problema 2. Se consideră planele perpendiculare α şi β şi dreptele necoplanare d şi g, astfel încât $\alpha \cap \beta = d$, $g \cap \alpha = \{A\}$ şi $g \cap \beta = \{B\}$. Fie A' proiecţia lui A pe dreapta d şi B' proiecţia lui B pe dreapta d. Notăm cu a şi b măsurile unghiurilor dintre dreapta g şi planul α, respectiv dintre dreapta g şi planul β. Dacă $AB = 2k > 0$, iar unghiul dintre dreptele d şi g este de 60°, calculaţi $\cos^2 a + \cos^2 b$.

ViitoriOlimpici.ro

Problema 3
Etapa 5
Clasa a VIII-a

Problema 3. Fie ABC un triunghi oarecare, cu $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ şi $p = \dfrac{a+b+c}{2}$. Arătaţi că:

a) $\dfrac{p-a}{p-c} + \dfrac{p-b}{p-a} + \dfrac{p-c}{p-b} - \dfrac{p-a}{b} - \dfrac{p-b}{c} - \dfrac{p-c}{a} \geqslant \dfrac{2p^2}{a^2+b^2+c^2}$.

b) triunghiul ABC este echilateral, dacă şi numai dacă are loc egalitatea $\dfrac{p-a}{p-c} + \dfrac{p-b}{p-a} + \dfrac{p-c}{p-b} - \dfrac{p-a}{b} - \dfrac{p-b}{c} - \dfrac{p-c}{a} = \dfrac{2p^2}{a^2+b^2+c^2}$.

ViitoriOlimpici.ro

Problema 4
Etapa 5
Clasa a VIII-a

Problema 4. Rezolvaţi în mulţimea numerelor naturale ecuaţia:

$$\left[\sqrt{\sqrt{1}\cdot\sqrt{2}}\right]+\left[\sqrt{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}\right]+\ldots+\left[\sqrt{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n+1}}\right]=2023.$$