Problema 1. 1. Fie numerele reale pozitive a, b, c cu proprietatea că $a + b + c = 16$. Arătaţi că

$$\sqrt{a \cdot b + a \cdot c} + \sqrt{b \cdot c + b \cdot a} + \sqrt{c \cdot a + c \cdot b} \leqslant 24.$$

Soluţie: Folosind inegalitatea dintre media geometrică şi media aritmetică a două numere reale pozitive obţinem inegalitatea $\sqrt{a \cdot b + a \cdot c} = \sqrt{a \cdot (b + c)} \leqslant \dfrac{a + (b + c)}{2} = 8$ şi analoagele, care, prin sumare, conduc la inegalitatea de demonstrat.

Problema 2. Fie $ABCD$ un paralelogram, punctul M simetricul punctului B faţă de punctul D, iar N un punct situat pe dreapta BC astfel încât $B \in (CN)$ şi $BN = 2 \cdot BC$. Demonstraţi că punctele M, A, N sunt coliniare.

Soluţie: Fie punctul P mijlocul segmentului BN. Deducem că segmentele AD şi NP sunt paralele şi egale, rezultă că patrulaterul $ADPN$ este paralelogram, prin urmare dreptele AN şi DP sunt paralele (1).

DP este linie mijlocie în triunghiul BMN, paralelă cu latura MN (2).

Din relaţiile (1) şi (2), ţinând cont de axioma paralelelor, deducem că punctele M, A, şi N sunt coliniare.

Problema 3. În interiorul unui triunghi ABC considerăm punctul T care are proprietatea că $\sphericalangle BTC = \sphericalangle CTA = \sphericalangle ATB$. Arătaţi că

$$2 \cdot AB + 2 \cdot BC + 2 \cdot CA > 4 \cdot AT + 3 \cdot BT + 2 \cdot CT.$$

Soluţie: Fie punctul D mijlocul segmentului TB şi punctul E situat pe dreapta AT, T între A şi E, astfel încât $TD = TE$. Atunci $\sphericalangle TED = \sphericalangle TDE = 60°$, de unde triunghiul TED este echilateral şi $DB = DT = DE$, de unde deducem că triunghiul TEB este dreptunghic în E. Prin urmare şi triunghiul AEB este dreptunghic în E, astfel că

$$AB > AE = AT + TE = AT + TB = AT + \frac{1}{2}BT.$$

În mod similar obţinem inegalităţile $AC > AT + \frac{1}{2}CT$ şi $BC > BT + \frac{1}{2}CT$. Adunând, apoi înmulţind inegalitatea obţinută cu 2 rezultă că

$$2 \cdot AB + 2 \cdot BC + 2 \cdot CA > 4 \cdot AT + 3 \cdot BT + 2 \cdot CT.$$

Observaţie: Punctul T cu proprietatea din enunţ se numeşte *punctul Torricelli-Fermat* al triunghiului ABC.

Problema 4. Determinaţi numerele naturale nenule a, b, c pentru care:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{a+b+c}{2}.$$

Soluţie. Dacă niciunul dintre numerele naturale nenule a, b, c nu este egal cu 1, atunci

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\leqslant\frac{3}{2}<3\leqslant\frac{a+b+c}{2},$$

astfel că egalitatea nu este posibilă.

Pentru $a=1$ relaţia dată devine

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{b+c}{2}.$$

Dacă $b\geqslant 2$ şi $c\geqslant 2$, atunci

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\leqslant\frac{3}{2}<2\leqslant\frac{b+c}{2}.$$

Prin urmare $b=1$ sau $c=1$.

Fără a restrânge generalitatea, datorită simetriei, putem considera $b=1$. Obţinem $1+\frac{1}{c}=\frac{c}{2}$. De aici $2c+2=c^2$, adică $c(c-2)=2$. Ultima relaţie nu are soluţii în mulţimea numerelor naturale nenule deoarece produsul $c(c-2)$ este fie impar, fie divizibil cu 4.

Aşadar nu există numerele naturale nenule a, b, c pentru care să aibă loc egalitatea din enunţ.