Problema 1
Etapa 4
Clasa a VIII-a

Problema 1. Rezolvaţi în mulţimea $\mathbb{N}^*$ inecuaţia:

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}\leqslant\frac{3}{5}.$$

Problema 2. Pe un cerc sunt 1000 de numere reale nenule, vopsite alternativ în alb şi negru. Fiecare număr negru este egal cu suma celor două numere albe vecine lui, iar fiecare număr alb este egal cu produsul celor două numere vecine lui. Aflaţi suma celor 1000 de numere.

Problema 3. Se consideră punctele necoplanare A, B, C, D şi dreptele AA', BB', CC', DD' perpendiculare pe planele (BCD), (ACD), (ABD), respectiv (ABC).

a) Dacă dreptele AA' şi BB' sunt concurente, demonstraţi că dreptele CC' şi DD' sunt coplanare.

b) Dacă dreptele AA', BB' şi CC' sunt concurente, demonstraţi că dreptele AA', BB', CC' şi DD' sunt concurente.

Problema 4. Se consideră triunghiul echilateral ABC şi punctele M, N pe cercul circumscris acestuia, astfel încât $M \in \overset{\frown}{ACB}$, $\overset{\frown}{AM} = 30^\circ$ şi $MN \perp BC$. Fie $D \in AB$ şi $E \in AC$, astfel încât $DM \perp AB$ şi $EN \perp AC$. Notăm cu F, G, H intersecţiile perechilor de drepte MN şi BC, DF şi AC, respectiv EF şi AB. Demonstraţi că triunghiul FGH este echilateral.