ViitoriOlimpici.ro

Problema 1
Etapa a 4-a
Clasa a VII-a

Problema 1. Câte elemente are mulţimea

$$A=\left\{\overline{abc} | \overline{abc}=\overline{bc}+10^{a+1}, a\neq b\neq c\neq a\right\}?$$

Artur Bălăucă, Botoşani
Gazeta Matematică nr. 9/ 2004

Soluţie. Cum $\overline{abc}<10^3$, rezultă că $a\leq 2$. Pentru $a=2$ relaţia dată devine $200+\overline{bc}=\overline{bc}+1000$, fals. Pentru $a=1$ găsim $100+\overline{bc}=\overline{bc}+100$, deci $b\neq c\neq 1\neq b$. Deducem că $b\in\{2,3,4,5,6,7,8,9\}$ şi $c\in\{0,2,3,4,5,6,7,8,9\}-\{b\}$, prin urmare A are $8\cdot 8=64$ de elemente.

Problema 2. Determinaţi prima zecimală a numărului $\sqrt{n^2+n}$, unde n este un număr natural nenul oarecare.

* * *

Soluţie. Din inegalitatea $n^2 < n(n+1) < (n+1)^2$ rezultă că $n < \sqrt{n^2+n} < n+1$, de unde deducem că $[\sqrt{n^2+n}] = n$. Prima zecimală a numărului $\sqrt{n^2+n}$ este deci $[10(\sqrt{n^2+n}-n)]$. Observăm că

$$10(\sqrt{n^2+n}-n) = \frac{10n}{\sqrt{n^2+n}+n} < \frac{10n}{2n} = 5.$$

Verificăm inegalitatea $10(\sqrt{n^2+n}-n) = \frac{10n}{\sqrt{n^2+n}+n} > 4$. Aceasta este echivalentă cu $3n > 2\sqrt{n^2+n}$, care, după ridicare la pătrat şi reducerea termenilor, devine $5n^2 > 4n$, adevărată pentru orice n natural nenul oarecare. Astfel obţinem că $[10(\sqrt{n^2+n}-n)] = 4$.

Cu $[x]$ am notat partea întreagă a numărului real x.

Problema 3. Fie triunghiul ascuţitunghic ABC şi punctele M, N, P mijloacele laturilor BC, CA şi respectiv AB. Notăm cu Q ortocentrul triunghiului MNP. Demonstraţi că $\sphericalangle BQC = 2\sphericalangle BAC$.

* * *

Soluţia 1. Fiind linie mijlocie în triunghiul ABC, $NP \parallel BC$. Cum $MQ \perp NP$, deducem că $MQ \perp BC$, deci dreapta MQ este mediatoarea segmentului $[BC]$. Astfel $QB = QC$. Analog $QA = QB$. Deducem că triunghiurile QAB, QBC, QCA sunt isoscele. Avem $\sphericalangle BAC = \sphericalangle BAQ + \sphericalangle CAQ$, $\sphericalangle BAQ + \sphericalangle CAQ = \sphericalangle ABQ + \sphericalangle ACQ$. Cum $\sphericalangle ABQ = \sphericalangle CBA - \sphericalangle CBQ$, $\sphericalangle ACQ = \sphericalangle BCA - \sphericalangle BCQ$, obţinem relaţia

$$\sphericalangle BAC = 180^\circ - \sphericalangle BAC - (180^\circ - \sphericalangle BQC).$$

Concluzia este imediată.

Soluţia 2. Ca mai sus $QA = QB = QC$. Rezultă că punctul Q este centrul cercului circumscris triunghiului ABC, de unde $\sphericalangle BQC$ este unghiul la centru care subîntinde arcul mic $\overset{\frown}{BC}$, având astfel aceeaşi măsură cu acesta. Pe de altă parte, unghiul $\sphericalangle BAC$ este unghiul înscris în acelaşi cerc, având măsura egală cu jumătate din măsura arcului pe care îl subîntinde, arcul mic $\overset{\frown}{BC}$. De aici rezultă concluzia.

Problema 4. Fie triunghiul echilateral ABC, E simetricul lui A faţă de C şi fie $M \in (BE)$ astfel încât $\sphericalangle ECM = 45°$. Pe perpendiculara în B pe BC se ia punctul N astfel încât $(BN) \equiv (BC)$, iar punctele N şi A sunt de aceeaşi parte a dreptei BC. Demonstraţi că patrulaterul $ACMN$ este trapez isoscel.

E. Blăjuţ , Bacău
Gazeta Matematică nr. 5-6/2004

Soluţie. Triunghiul ABN este isoscel, $\sphericalangle ABN = 90° - 60° = 30°$, deci $\sphericalangle BAN = 75°$ şi $\sphericalangle CAN = 135°$.

Triunghiul BCE este isoscel cu $\sphericalangle BCE = 120°$, de unde $\sphericalangle BEC = \sphericalangle BCE = 30°$. Cum $\sphericalangle BCM = 120° - 45° = 75°$, deducem că $\sphericalangle BMC = 180° - 30° - 75° = 75°$. Atunci $\sphericalangle ACM = 135°$, iar triunghiul BMC este isoscel şi $BM = BC = BN$. Prin urmare triunghiul MBN este isoscel cu $\sphericalangle MBN = 120°$, de unde $\sphericalangle BMN = 30°$. Rezultă deci că $\sphericalangle CMN = 45°$, $\sphericalangle ANM = 360° - 45° - 135° - 135° = 45°$. Cum $\sphericalangle ACM + \sphericalangle CMN = 180°$, rezultă că $AC \parallel MN$ şi astfel patrulaterul $ACMN$ este trapez, iar din $\sphericalangle CMN = 45° = \sphericalangle ANM$ reiese că acesta este isoscel.