Problema 1. Determinaţi numerele reale x care verifică relaţia

$$\{x\} = \frac{x-3}{2[x]-5},$$

unde $\{x\}$ reprezintă partea fracţionară , respectiv $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x.

,

Soluţie. Înlocuind $x = [x] + \{x\}$ şi eliminând numitorul obţinem $2[x] \cdot \{x\} - 5\{x\} = [x] + \{x\} - 3$, de unde $2[x] \cdot \{x\} - 6\{x\} - [x] + 3 = 0$. Descompunând în factori obţinem $([x]-3) \cdot (2\{x\} - 1) = 0$. Astfel numerele căutate sunt cele pentru care $[x] = 3$ sau $\{x\} = \frac{1}{2}$, deci numerele pentru care $3 \leqslant x < 4$, cât şi numerele de forma $x = k + \frac{1}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

Problema 2. Dacă a, b, c sunt numere naturale nenule şi $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$, arătaţi că $a\sqrt{bc}+b\sqrt{ca}+c\sqrt{ab} \leqslant abc$.

Ştefan Marica, Drobeta Turnu Severin
Gazeta Matematică nr. 5/2009

Soluţie. Folosind inegalitatea între media geometrică şi media aritmetică a două numere pozitive obţinem $a\sqrt{bc}=\sqrt{ab \cdot ac} \leqslant \frac{ab+ac}{2}$ şi cele două analoage. Sumând, rezultă că $a\sqrt{bc}+b\sqrt{ca}+c\sqrt{ab} \leqslant ab+bc+ac = abc \cdot \left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=abc$.

Problema 3. Fie $ABCD$ un trapez cu baza mare AB, Q piciorul perpendicularei din D pe AB şi punctele M, N, P mijloacele segmentelor $[BD]$, $[BC]$ şi $[AB]$. Ştiind că patrulaterul $MNPQ$ este paralelogram, demonstraţi că punctele A, B, C, D sunt conciclice.

,

Soluţie. QM este mediana corespunzătoare ipotenuzei triunghiului dreptunghic BQD, prin urmare $QM = MB$, deci $\sphericalangle DBA = \sphericalangle MQB$.

$MNPQ$ este paralelogram, rezultă $MQ \parallel NP$. NP este linie mijlocie în triunghiul ABC, deci $NP \parallel AC$. Atunci $MQ \parallel AC$ şi $\sphericalangle MQB = \sphericalangle CAB$, ca unghiuri corespondente. Ţinând cont că $\sphericalangle DBA = \sphericalangle MQB$, deducem că $\sphericalangle DBA = \sphericalangle CAB$, astfel trapezul $ABCD$ este isoscel, deci inscriptibil.

Problema 4. În triunghiul ABC construim bisectoarea $[AD$ şi mediana $[AM]$, $D, M \in (BC)$. Dacă $\frac{A_{\Delta ADM}}{A_{\Delta ABC}} = \frac{1}{k}$, $k \in \mathbb{N}^*$, aflaţi k pentru care $\frac{AC}{AB}$ este număr natural.

Elena Râmnicianu şi *Victor Săceanu*, Drobeta Turnu-Severin
Gazeta Matematică nr. 3/2011

Soluţie. Cum $\frac{AC}{AB}$ este număr natural, deducem că $AC \geqslant AB$, $D \in (BM)$ în condiţiile problemei. Notăm $AC = b, AB = c, \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c} = n \in \mathbb{N}$. Fie h_a lungimea înălţimii corespunzătoare laturii BC a triunghiului ABC. Atunci $\frac{A_{\Delta ADM}}{A_{\Delta ABC}} = \frac{h_a \cdot DM}{2} \cdot \frac{2}{h_a \cdot BC} = \frac{DM}{BC}$.

Din teorema bisectoarei $\frac{BD}{DC} = \frac{c}{b}$, de unde $\frac{BD}{BC} = \frac{c}{b+c}$. Cum $\frac{1}{k} = \frac{A_{\Delta ABC}}{A_{\Delta ADM}} = \frac{BC}{DM} = \frac{BC}{BM - BD}$, obţinem $\frac{1}{k} = \frac{BM}{BC} - \frac{BD}{BC} = \frac{1}{2} - \frac{c}{b+c} = \frac{b-c}{2(b+c)} = \frac{n-1}{2(n+1)}$. Prin urmare $k = \frac{2(n+1)}{n-1} \in \mathbb{N}^*$, de unde, punând condiţia ca numărul $\frac{2(n+1)}{n-1}$ să fie natural, obţinem $n \in \{2, 5\}$.