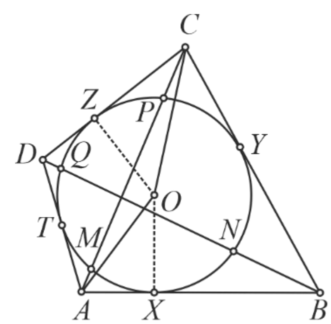
Problema 1. Fie *ABCD* un patrulater circumscris unui cerc de centru *O*. Notăm cu *X*, *Y*, *Z*, *T* punctele de tangență ale cercului cu laturile *AB*, *BC*, *CD*, respectiv *DA*, și cu *M*, *N*, *P*, *Q* intersecțiile diagonalelor cu cercul, astfel încât *M* se află pe segmentul *AP*, iar *N* se află pe segmentul *BQ*. Arătați că:

a) $OA^2 - OC^2 = AC\left(AM - CP\right)$;

b) $\dfrac{AX^2}{AM} + \dfrac{BY^2}{BN} + \dfrac{CZ^2}{CP} + \dfrac{DT^2}{DQ} = AC + BD + MP + NQ$.

***



Soluție. a) Fie $\mathcal{C}(O, R)$ cercul înscris în patrulater.

Deoarece triunghiurile *AOX* și *COZ* sunt dreptunghice în *X*, respectiv *Y*, iar $OX = OY = R$, deducem că $OA^2 - OC^2 = AX^2 - CZ^2 \overset{\text{not.}}{=} \alpha$.

Folosind puterea punctului față de cerc, deducem că $AX^2 = AM \cdot AP$ și $CZ^2 = CP \cdot CM$. Înlocuind în α, obținem:

$$\alpha = AM \cdot AP - CP \cdot CM = AM \cdot \left(AC - CP\right) - CP \cdot \left(AC - AM\right),$$

așadar $\alpha = AM \cdot AC - AM \cdot CP - CP \cdot AC + AM \cdot CP = AC \cdot \left(AM - CP\right)$.

b) Folosind puterea punctului față de cerc, deducem:

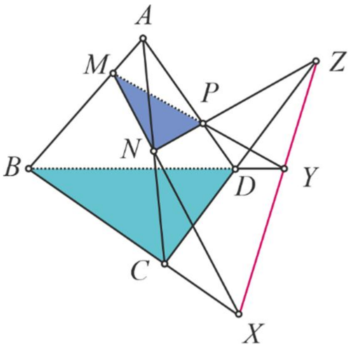
$$\frac{AX^2}{AM} = AP, \quad \frac{BY^2}{BN} = BQ, \quad \frac{CZ^2}{CP} = CM, \quad \frac{DT^2}{DQ} = DN.$$

Așadar $\dfrac{AX^2}{AM} + \dfrac{BY^2}{BN} + \dfrac{CZ^2}{CP} + \dfrac{DT^2}{DQ} = AP + BQ + CM + DN \overset{\text{not.}}{=} \beta$.

În consecință, $\beta = \left(AC - CP\right) + \left(BD - DQ\right) + \left(CP + MP\right) + \left(DQ + NQ\right) = AC + BD + MP + NQ$.

Problema 2. Se consideră un tetraedru regulat *ABCD* cu latura de 4 cm și punctele *M*, *N*, *P* pe muchiile *AB*, *AC*, respectiv *AD*. Dacă $AM < MB$, punctul *N* este mijlocul muchiei *AC*, $AP = 2\cdot DP$, $\{X\} = MN \cap BC$, $\{Y\} = MP \cap BD$, $\{Z\} = NP \cap CD$, iar $XY = 1,5\cdot YZ$, determinați lungimea segmentului *AM*.

***



Soluție. Punctele *X*, *Y* și *Z* se află la intersecția planelor (*ABC*) și (*MNP*), deci aparțin dreptei de intersecție a celor două plane, așadar sunt coliniare (Desargues).

Folosind teorema lui Menelaus în triunghiul *ACD*, cu transversala *N*-*P*-*Z*, obținem: $\frac{ZD}{ZC}\cdot\frac{NC}{NA}\cdot\frac{PA}{PD}=1$, adică $\frac{ZD}{ZC}\cdot 1\cdot 2=1$.

Așadar $\frac{ZD}{ZC}=\frac{1}{2}$, deci *D* este mijlocul segmentului *CZ*.

Folosind teorema lui Menelaus în triunghiul *CXZ*, cu transversala *B*-*D*-*Y*, obținem:
$\frac{DZ}{DC}\cdot\frac{BC}{BX}\cdot\frac{YX}{YZ}=1$, adică $1\cdot\frac{BC}{BX}\cdot\frac{3}{2}=1$, deci $\frac{BC}{BX}=\frac{2}{3}$, iar $\frac{XB}{XC}=\frac{3}{1}$.

Folosind teorema lui Menelaus în triunghiul *ABC*, cu transversala *M*-*N*-*X*, obținem:
$\frac{MA}{MB}\cdot\frac{XB}{XC}\cdot\frac{NC}{NA}=1$, adică $\frac{MA}{MB}\cdot\frac{3}{1}\cdot 1=1$, deci $\frac{MA}{MB}=\frac{1}{3}$, iar $\frac{MA}{AB}=\frac{1}{4}$. Așadar $MA=1\,\text{cm}$.

Problema 3. a) Demonstrați că există o infinitate de numere $x, y \in (1, \infty)$, astfel încât x și y **nu** sunt întregi, dar $[x \cdot y] = [x] \cdot [y]$.

b) Demonstrați că pentru orice $x, y \in (-\infty, 0)$ care **nu** sunt întregi, avem $[x \cdot y] \neq [x] \cdot [y]$.

Dana Heuberger

Soluție. a) Pentru $k \in \mathbb{N}^*$, alegem $x, y \in \left(k, k + \frac{1}{4k}\right)$. Avem $[x] = [y] = k$, deci $[x] \cdot [y] = k^2$. În plus, $x \cdot y \in \left(k^2, k^2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{16k^2}\right)$ iar $k^2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{16k^2} < k^2 + 1$, deci $[x \cdot y] = k^2 = [x] \cdot [y]$.

b) Fie $x, y \in (-\infty, 0) \setminus \mathbb{Z}$ și $k, n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $[x] = -k$, iar $[y] = -n$. Avem $[x] \cdot [y] = k \cdot n$. Deoarece $-k < x < -k + 1 \leq 0$ și $-n < x < -n + 1 \leq 0$, obținem $k \cdot n > x > (k-1)(n-1)$, deci $[x \cdot y] < k \cdot n = [x] \cdot [y]$, așadar $[x \cdot y] \neq [x] \cdot [y]$.

Problema 4. Fie $a, b, c \in (0, \infty)$ astfel încât $a^2+b^2+c^2+abc=4$. Demonstrați că:

a) $a \le 2-bc$;

b) $a+b+c \le 3$.

***

Soluție. a) Metoda I: Înmulțind cu 4 egalitatea din enunț și grupând convenabil termenii, obținem:

$$\left(4a^2+4abc+b^2c^2\right)+4\left(b^2-2bc+c^2\right)-\left(b^2c^2-8bc+16\right)=0,$$

așadar $0 \le 4(b-c)^2=(bc-4)^2-(2a+bc)^2=-(2a+4)(2bc+2a-4)$. Deoarece $a>0$, rezultă că $2bc+2a-4 \le 0$, deci $a \le 2-bc$.

Metoda a II-a: $4=a^2+\left(b^2+c^2\right)+abc \ge a^2+2bc+abc$, deci $bc(a+2) \le 4-a^2$ și deoarece $a+2>0$, rezultă că $bc \le 2-a$, deci $a \le 2-bc$.

b) Deoarece avem trei numere strict pozitive și două intervale - $(0,1]$ și $[1,\infty)$, din principiul cutiei rezultă că cel puțin două dintre numere se află de aceeași parte față de 1. Fără a restrânge generalitatea, putem considera că aceste numere sunt b și c. Atunci. $(1-b)(1-c) \ge 0$, așadar $1-b-c+bc \ge 0$. Rezultă că $b+c \le 1+bc \overset{a)}{\le} 1+2-a$, deci $a+b+c \le 3$.