Problema 1. Fie $ABCD$ un patrulater circumscris unui cerc de centru O. Notăm cu X, Y, Z, T punctele de tangență ale cercului cu laturile AB, BC, CD, respectiv DA, și cu M, N, P, Q intersecțiile diagonalelor cu cercul, astfel încât M se află pe segmentul AP, iar N se află pe segmentul BQ. Arătați că:

a) $OA^2 - OC^2 = AC\left(AM - CP\right)$;

b) $\dfrac{AX^2}{AM}+\dfrac{BY^2}{BN}+\dfrac{CZ^2}{CP}+\dfrac{DT^2}{DQ}=AC+BD+MP+NQ$.

Problema 2. Se consideră un tetraedru regulat *ABCD* cu latura de 4 cm și punctele *M*, *N*, *P* pe muchiile *AB*, *AC*, respectiv *AD*. Dacă $AM < MB$, punctul *N* este mijlocul muchiei *AC*, $AP = 2 \times DP$, $\{X\} = MN \cap BC$, $\{Y\} = MP \cap BD$, $\{Z\} = NP \cap CD$, iar $XY = 1{,}5 \times YZ$, determinați lungimea segmentului *AM*.

Problema 3. a) Demonstrați că există o infinitate de numere $x, y \in (1, \infty)$, astfel încât x și y **nu** sunt întregi, dar $[x \cdot y] = [x] \cdot [y]$.

b) Demonstrați că pentru orice $x, y \in (-\infty, 0)$ care **nu** sunt întregi, avem $[x \cdot y] \neq [x] \cdot [y]$.

Problema 4
Etapa 2
Clasa a VIII-a

Problema 4. Fie $a, b, c \in (0, \infty)$ astfel încât $a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4$. Demonstrați că:

a) $a \le 2 - bc$;

b) $a + b + c \le 3$.