Problema 1
Etapa 2
Clasa a VII-a

Problema 1. Rezolvaţi ecuaţia $\sqrt{x,(4)} - \sqrt{1,(x+2)} = 1$, unde x este cifră din sistemul zecimal, iar expresiile de sub radical sunt fracţii periodice simple.

Vasile Chiriac, Bacău
Gazeta Matematică nr. 5/2009

Soluţie. Observăm că dacă $x \in \{0, 1\}$ atunci $\sqrt{x,(4)} - \sqrt{1,(x+2)} < 1$. Cum $x + 2$ este o cifră cel mult egală cu 8, deducem că $x \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$. Analizând toate posibilităţile găsim $x = 5$.

Problema 2. Demonstraţi că

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots+\frac{1}{197^2}+\frac{1}{199^2}<\frac{499}{400}.$$

Carmen Cristoloveanu, Piteşti
Gazeta Matematică nr. 5-6/2004

Soluţie. Fie k un număr natural nenul oarecare. Folosind inegalitatea între media armonică şi media aritmetică a numerelor pozitive $\frac{1}{2k}$ şi $\frac{1}{2k+2}$ obţinem

$$\frac{2}{2k+2k+2}<\sqrt{\frac{1}{2k}\cdot\frac{1}{2k+2}}.$$

Prelucrând, deducem că

$$\frac{1}{(2k+1)^2}<\frac{1}{2k\cdot(2k+2)}.$$

De aici, dând valori lui k obţinem inegalităţile

$$\frac{1}{3^2}<\frac{1}{2\cdot 4},\ \frac{1}{5^2}<\frac{1}{4\cdot 6},\ldots,\ \frac{1}{199^2}<\frac{1}{198\cdot 200}.$$

Adunând inegalităţile obţinem

$$\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots+\frac{1}{197^2}+\frac{1}{199^2}<\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{99\cdot 100}\right)=\frac{99}{400}.$$

Adunăm 1 în ambii membri şi problema este rezolvată.

Problema 3
Etapa 2
Clasa a VII-a

Problema 3. Fie $ABCD$ un patrulater convex în care O este intersecţia diagonalelor sale. Notăm cu M, N, P, Q respectiv simetricele punctului O faţă de mijloacele segmentelor (AB), (BC), (CD), (DA). Demonstraţi că patrulaterul $MNPQ$ este dreptunghi dacă şi numai dacă patrulaterul $ABCD$ este ortodiagonal.

Ion Marcel Neferu, Drăgăşani
Gazeta Matematică nr. 11/2003
Enunţ modificat

Soluţie. Din construcţie, $AODQ$ şi $AOBM$ sunt paralelograme, deci $AM \parallel BO, AQ \parallel OD$. De aici $A \in MQ$ şi $MQ \parallel BD$. Analog obţinem $B \in MN$, $C \in NP$, $D \in PQ$, $NP \parallel BD$ şi $MN \parallel AC \parallel QP$. Deducem că $MNPQ$ este paralelogram având laturile paralele cu diagonalele patrulaterului $ABCD$. Prin urmare, patrulaterul $MNPQ$ este dreptunghi dacă şi numai dacă patrulaterul $ABCD$ este ortodiagonal.

Problema 4. Fie D un punct al segmentului (BC). De aceeaşi parte a dreptei BC construim triunghiurile isoscele FDC şi EBD, cu $FD = FC$ şi $EB = ED$. Notăm cu O mijlocul segmentului EF şi cu A intersecţia dreptelor CF şi BE. Arătaţi că punctele A, O, D sunt coliniare dacă şi numai dacă triunghiul ABC este isoscel.

Florin Cârjan, Braşov
Gazeta Matematică nr. 11/2003

Soluţie. Avem $\sphericalangle BAC = 180° - \sphericalangle ABD - \sphericalangle ACD = 180° - \sphericalangle EDB - \sphericalangle FDC = \sphericalangle EDF$. Fie M simetricul punctului D faţă de punctul O. Atunci $EMFD$ este paralelogram şi $\sphericalangle EMF = \sphericalangle EDF = \sphericalangle EAF$.

Dacă punctele A, O, D sunt coliniare rezultă că $A \in MO$, A şi M de aceeaşi parte a lui O, şi, cum $\sphericalangle EMF = \sphericalangle EAF$, deducem că $A = M$, de unde $AB = AE + EB = DF + DE = AF + FC = AC$.

Reciproc, dacă triunghiul ABC este isoscel, $\sphericalangle AED = \sphericalangle AFD = 2\sphericalangle B = 2\sphericalangle C$ şi, cum $\sphericalangle EDF = \sphericalangle EAF$, deducem că $EAFD$ este paralelogram. Atunci $A = M$, deci punctele A, O, D sunt coliniare.