Problema 1. Se consideră numerele reale pozitive *a, b, c*, cu $a \cdot b \cdot c = 1$. Demonstrați că:

a) $\frac{a}{b}+\frac{b}{c} \geq a+\frac{1}{c}$;

b) $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}+\frac{c}{a}+\frac{a}{c} \geq a+b+c+ab+bc+ca$.

***

Soluție. a) Deoarece $b, c \in (0, \infty)$, inegalitatea este echivalentă cu $ac+b^2 \geq abc+b$, deci $ac(1-b)+b(b-1) \geq 0$. Cum $ac=\frac{1}{b}$, obținem $b(b-1)-\frac{1}{b}(b-1) \geq 0$. Rezultă că inegalitatea din enunț este echivalentă cu $(b-1)^2(b+1) \geq 0$, adevărat.

b) Folosind punctul **a)**, avem $\frac{a}{b}+\frac{b}{c} \geq a+\frac{1}{c}$. Așadar, $\frac{a}{b}+\frac{b}{c} \geq a+ab$. Analog rezultă inegalitățile: $\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \geq b+bc$, $\frac{c}{a}+\frac{a}{b} \geq c+ca$, $\frac{b}{a}+\frac{a}{c} \geq b+ab$, $\frac{c}{b}+\frac{b}{a} \geq c+bc$ și $\frac{a}{c}+\frac{c}{b} \geq a+ca$.

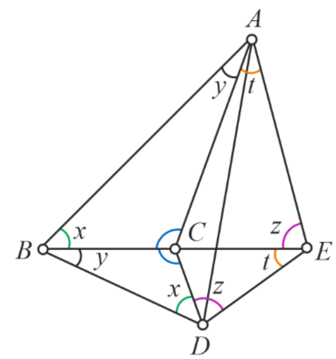
Adunând cele șase inegalități, rezultă concluzia.

Problema 2. Se consideră triunghiurile asemenea *ABC* și *BDC*, astfel încât *A* și *D* sunt de o parte și de alta a dreptei *BC*. Notăm cu *E* simetricul lui *B* față de *C*. Arătați că:

a) patrulaterul *ABDE* este inscriptibil;

b) dacă $AE = AC$, atunci triunghiul *ABD* este isoscel.

Dana Heuberger



Soluție. a) Deoarece $\Delta ABC \sim \Delta BDC$, rezultă $ABC = BDC = x°$, $BAC = CBD = y°$, $ACB = BCD$ și $\dfrac{BC}{DC} = \dfrac{AC}{BC}$.

Dar $BC = CE$, deci obținem $\dfrac{CE}{CD} = \dfrac{CA}{CE}$.

Deoarece $ACE = 180° - ACB = 180° - BCD = DCE$, conform cazului L.U.L. rezultă că triunghiurile *ACE* și *ECD* sunt asemenea.

Așadar $AEC = EDC = z°$ și $CAE = CED = t°$. Din ΔABE, obținem că $BAE + ABE + AEB = y° + t° + x° + z° = 180°$, deci $ABD + AED = x° + y° + z° + t° = 180°$. În consecință, patrulaterul *ABDE* este inscriptibil.

b) Dacă $AE = AC$, atunci triunghiul *ACE* este isoscel cu baza *CE* și cum $\Delta ACE \sim \Delta ECD$, rezultă că $DE = CE = BC$. Apoi, $AED = z° + t° = 180° - (x° + y°) = ACB$ și conform cazului L.U.L. rezultă că $\Delta ABC \equiv \Delta ADE$, deci $AB = AD$, așadar triunghiul *ABD* este isoscel.

Problema 3. Alex are o bucată de brânză de 1 kg. Alege un număr $a > 0$, $a \neq 1$ și taie bucata de brânză în două bucăți, astfel încât raportul maselor acestora să fie egal cu $\frac{1}{a}$. Apoi, poate să aleagă una dintre bucățile rămase și să o taie, astfel încât raportul maselor bucăților obținute din ea să fie egal cu $\frac{1}{a}$. Alex face un număr finit de tăieturi, la fiecare etapă împărțind o bucată de brânză în două, după același procedeu. Arătați că este posibil ca Alex să aleagă un număr a cu ajutorul căruia să obțină două grămezi de bucăți de brânză, astfel încât fiecare dintre grămezi să cântărească 0,5 kg.

International Mathematics Tournament of the Towns, Spring 2010

Soluție. După prima tăietură, Alex obține două bucăți de brânză cu masele de $\frac{1}{a+1}$ kg, respectiv $\frac{a}{a+1}$ kg. Dacă repetă operația asupra bucății care cântărește $\frac{a}{a+1}$ kg, obține alte două bucăți, cu masele de $\frac{a}{(a+1)^2}$ kg, respectiv $\frac{a^2}{(a+1)^2}$ kg.

Arătăm că există $a > 0$, $a \neq 1$, astfel încât $\frac{a^2}{(a+1)^2} = \frac{a}{(a+1)^2} + \frac{1}{a+1}$. Aducând fracțiile la același numitor în ecuația precedentă, obținem $a^2 = 2a + 1$, deci $(a - 1)^2 = 2$. Soluția este $a = \sqrt{2} + 1$.

Problema 4. Spunem că o mulțime $A \subset \mathbb{R}^*$ cu cel puțin două elemente este *practică*, dacă sunt îndeplinite simultan condițiile:

(i) pentru orice $x, y \in A$ cu $x \neq y$, unul singur dintre numerele $x+y$ și xy este rațional;

(ii) pentru orice $x, y \in A$ cu $x \neq y$, numărul x^2+y^2 este rațional.

a) Determinați mulțimile practice A pentru care $\sqrt{2}+\sqrt{3} \in A$.

b) Dați exemplu de mulțime practică *A*, care are o infinitate de elemente și este inclusă în $(0,1]$.

Dana Heuberger

Soluție. Presupunem că $x+y \in \mathbb{Q}$. Din (ii) avem $x^2+y^2 = \underbrace{(x+y)}_{\in \mathbb{Q}}{}^2 - 2xy \in \mathbb{Q}$, deci și $xy \in \mathbb{Q}$, contradicție. Așadar, pentru orice $x, y \in A$ cu $x \neq y$, avem $x+y \notin \mathbb{Q}$ și $xy \in \mathbb{Q}^*$.

Presupunem că există $a \in A \cap \mathbb{Q}$. Pentru un $x \in A \setminus \{a\}$ oarecare, deoarece $ax = k \in \mathbb{Q}^*$, rezultă că $x = \frac{k}{a} \in \mathbb{Q}$, deci și $x+a \in \mathbb{Q}$, contradicție. Așadar *A* este formată din elemente iraționale.

a) Presupunem că *A* are cel puțin trei elemente. Fie $x, y, z \in A$, distincte două câte două. Deoarece $xy \in \mathbb{Q}$ și $xz \in \mathbb{Q}$, rezultă că $x^2yz \in \mathbb{Q}$ și cum $yz \in \mathbb{Q}^*$, rezultă că $x^2 \in \mathbb{Q}$. În consecință, pentru orice $a \in A$, avem că $a^2 \in \mathbb{Q}$. Deoarece $\sqrt{2}+\sqrt{3} \in A$, ar trebui ca numărul $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2 = 5+2\sqrt{6}$ să fie rațional, fals. Așadar presupunerea făcută este falsă, deci *A* nu poate avea mai mult de două elemente. În consecință, căutăm *A* de forma $A = \left\{\sqrt{2}+\sqrt{3}, \alpha\right\}$, cu $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Din cele de mai înainte deducem că $\alpha\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right) = r \in \mathbb{Q}$, deci $\alpha = r\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)$. Din **(ii)** știm că $\alpha^2 + \left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2 \overset{\text{not.}}{=} q \in \mathbb{Q}$, așadar $r^2\left(5-2\sqrt{6}\right)+5+2\sqrt{6} = 5r^2+5+\left(2-2r^2\right)\sqrt{6} \in \mathbb{Q}$.

Dacă $2-2r^2 \neq 0$, din relația precedentă rezultă că $\sqrt{6} \in \mathbb{Q}$, fals. Așadar $r = \pm 1$ și obținem soluțiile

$$A_1 = \left\{\sqrt{2}+\sqrt{3}, \sqrt{3}-\sqrt{2}\right\} \text{ și } A_2 = \left\{\sqrt{2}+\sqrt{3}, \sqrt{2}-\sqrt{3}\right\}.$$

b) Un exemplu este mulțimea $A = \left\{ \frac{\sqrt{2}}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \right\} \subset (0,1]$.