ViitoriOlimpici.ro

Problema 1
Etapa 1
Clasa a VIII-a

Problema 1. Se consideră numerele reale pozitive a, b, c, cu $a \cdot b \cdot c = 1$. Demonstrați că:

a) $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} \geq a + \frac{1}{c}$;

b) $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{b}{c} + \frac{c}{b} + \frac{c}{a} + \frac{a}{c} \geq a + b + c + a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a$.

***

Problema 2. Se consideră triunghiurile asemenea ABC și BDC, astfel încât A și D sunt de o parte și de alta a dreptei BC. Notăm cu E simetricul lui B față de C. Arătați că:

a) patrulaterul $ABDE$ este inscriptibil;

b) dacă $AE = AC$, atunci triunghiul ABD este isoscel.

Dana Heuberger

Problema 3. Alex are o bucată de brânză de 1 kg. Alege un număr $a > 0$, $a \neq 1$ și taie bucata de brânză în două bucăți, astfel încât raportul maselor acestora să fie egal cu $\frac{1}{a}$. Apoi, poate să aleagă una dintre bucățile rămase și să o taie, astfel încât raportul maselor bucăților obținute din ea să fie egal cu $\frac{1}{a}$. Alex face un număr finit de tăieturi, la fiecare etapă împărțind o bucată de brânză în două, după același procedeu. Arătați că este posibil ca Alex să aleagă un număr a cu ajutorul căruia să obțină două grămezi de bucăți de brânză, astfel încât fiecare dintre grămezi să cântărească 0,5 kg.

***

Problema 4. Spunem că o mulțime $A \subset \mathbb{R}^*$ cu cel puțin două elemente este *practică*, dacă sunt îndeplinite simultan condițiile:

(i) pentru orice $x, y \in A$ cu $x \neq y$, unul singur dintre numerele $x + y$ și xy este rațional;

(ii) pentru orice $x, y \in A$ cu $x \neq y$, numărul $x^2 + y^2$ este rațional.

a) Determinați mulțimile practice A pentru care $\sqrt{2} + \sqrt{3} \in A$.

b) Dați exemplu de mulțime practică A care are o infinitate de elemente și este inclusă în $(0,1]$.

Dana Heuberger