ViitoriOlimpici.ro

Problema 1
Etapa 1
Clasa a VII-a

**Problema 1.** Aflați numerele întregi, diferite de -1, astfel încât $\sqrt{\frac{x-2010}{x+1}}$ să fie număr întreg.

*Nicolae Ivășchescu, G.M. nr. 11/2010*

**Soluție.**

Dacă $\sqrt{\frac{x-2010}{x+1}}$ este număr întreg, atunci $\frac{x-2010}{x+1}$ este număr întreg. Rezultă că $x+1$ divide pe $x-2010$, așadar $x+1$ divide pe 2011. Atunci $x+1 \in \{-2011, -1, 1, 2011\}$, deci $x \in \{-2012, -2, 0, 2010\}$. Calculând $\sqrt{\frac{x-2010}{x+1}}$ în fiecare caz, găsim că este întreg pentru $x = 2010$.

**Problema 2.** Determinați numerele întregi $a$ și $b$ care verifică relația $|a| = \sqrt{\frac{2022-b}{4b+4}}$.

$***$

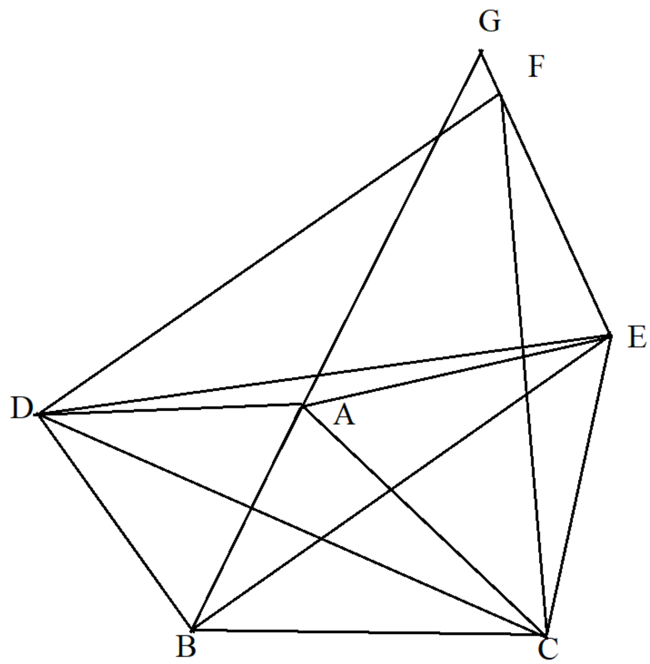
**Soluție.**

Relația dată se scrie echivalent $(4a^2+1)(b+1) = 2023 = 7 \cdot 17^2$. Găsim soluțiile $(a,b) \in \{(0,2022);(2,118);(-2,118)\}$.

**Problema 3**. Pe laturile $AB$ și $AC$ ale triunghiului $ABC$ se construiesc în exterior triunghiurile echilaterale $ADB$ și $ACE$. Fie $F$ un punct în plan astfel încât dreapta $DE$ separă punctele $B$ și $F$.
Să se arate că $BDFE$ este paralelogram dacă și numai dacă triunghiul $DCF$ este echilateral.

Gabriel Tica

*Soluție:*




„⇒” $\Delta ADC \equiv \Delta ABE \Rightarrow DC = DE$.
Construim $\{G\} = AB \cap EF$.
Din $BD \parallel FE$ rezultă
$\sphericalangle AGE \equiv \sphericalangle ABD (= 60^o)$.
Deoarece unghiul $BAE$ este exterior $\Delta AEG$, rezultă
$\sphericalangle BAE = \sphericalangle AGE + \sphericalangle AEG$, de unde rezultă $\sphericalangle BAE = 60^o + \sphericalangle AEG$, de unde obținem că $\sphericalangle CEF \equiv \sphericalangle CAD$.
Rezultă $\Delta FEC \equiv \Delta DAC (L.U.L)$, de aici rezultă $CF = CD$, dar $BE = DF$.
De aici rezultă $DC = CF = FD$, adică triunghiul $CDF$ este echilateral.

„⇐” Fie $H$ în semiplanul determinat de $DE$ astfel încât $DE$ separă $H$ și $B$ și $BDHE$ paralelogram.

Conform primei implicații obținem că triunghiul $CDH$ este echilateral, de unde rezultă $H$=$F$.

**Problema 1.** Determinați măsurile unghiurilor triunghiului $ABC$ în care $\sphericalangle C = 2 \cdot \sphericalangle A$ și $AC = 2BC$.

*Marcel Chiriță, G.M. nr. 8/2007*

**Soluție.**

Fie $P$ punctul în care bisectoarea unghiului $C$ intersectează latura $AB$, iar $M$ mijlocul laturii $AC$. Atunci $CM = BC$, $\sphericalangle MCP = \sphericalangle BCP$, $CP = CP$, deci triunghiurile $MCP$ și $BCP$ sunt congruente ($L.\ U.\ L.$).

Pe de altă parte, triunghiul $PAC$ este isoscel cu baza $AC$, deci mediana $PM$ este și înălțime, așadar $\sphericalangle PMC = 90°$. Prin urmare $\sphericalangle PBC = \sphericalangle PMC = 90°$, iar $\sphericalangle BCA = 60°$, $\sphericalangle BAC = 30°$.