Problema săptămânii 345

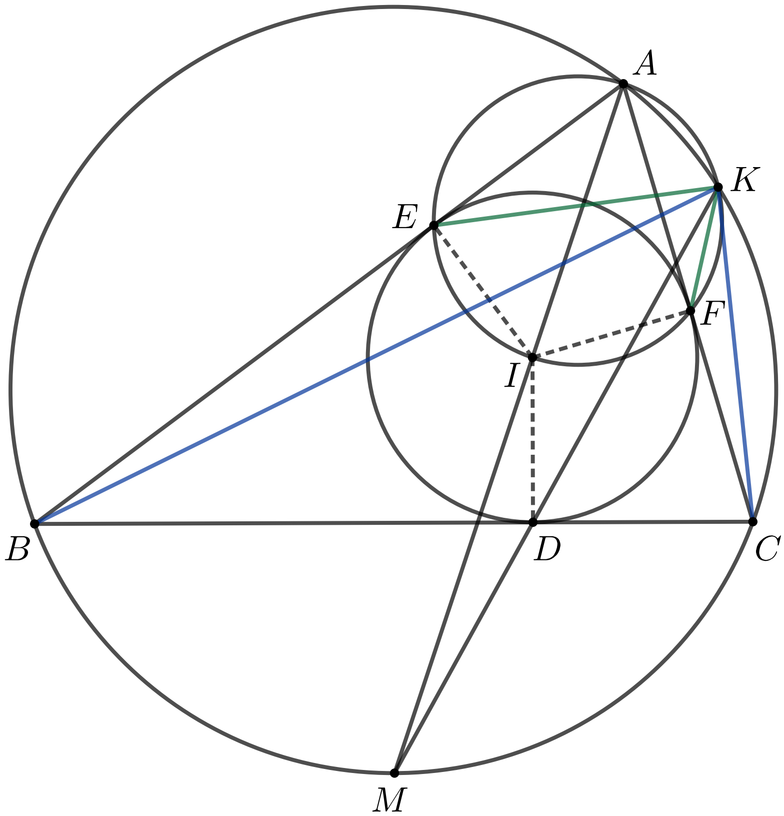
Fie I centerul cercului înscris în triunghiul ABC şi D punctul de contact al cercului înscris cu latura BC. Cercul de diametru AI intersectează a doua oară cercul circumscris triunghiului ABC în punctul $K \neq A$. Arătaţi că punctul de intersecţie a dreptelor AI şi KD se află pe cercul circumscris triunghiului ABC.

Olimpiadă Marea Britanie, 2021

Soluţie: Fie M punctul în care semidreapta $(AI$ intersectează cercul circumscris. Atunci M este mijlocul arcului BC şi trebuie să demonstrăm că $(KD$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle BKC$. Dacă E şi F sunt punctele de tangenţă al cercului înscris cu laturile AB, respectiv AC, atunci E şi F se află pe cercul de diametru $[AI]$.
Triunghiurile KEB şi KFC sunt asemenea ($\sphericalangle KFC = 180° - \sphericalangle KFA = 180° - \sphericalangle KEA = \sphericalangle KEB$ şi $\sphericalangle KCF = \sphericalangle KBE$), deci

$$\frac{KB}{KC} = \frac{EB}{FC} = \frac{ED}{FD}.$$

Reciproca teoremei bisectoarei arată că $(KD$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle BKC$.



Alte proprietăţi interesante ale configuraţiei pot fi găsite în The Sharky-Devil Lemma. Îi mulţumesc lui *Titu Zvonaru* pentru a ni le fi semnalat.

Am primit soluţie de la *Alexandru Ciobotea.*

Problem of the week no. 345

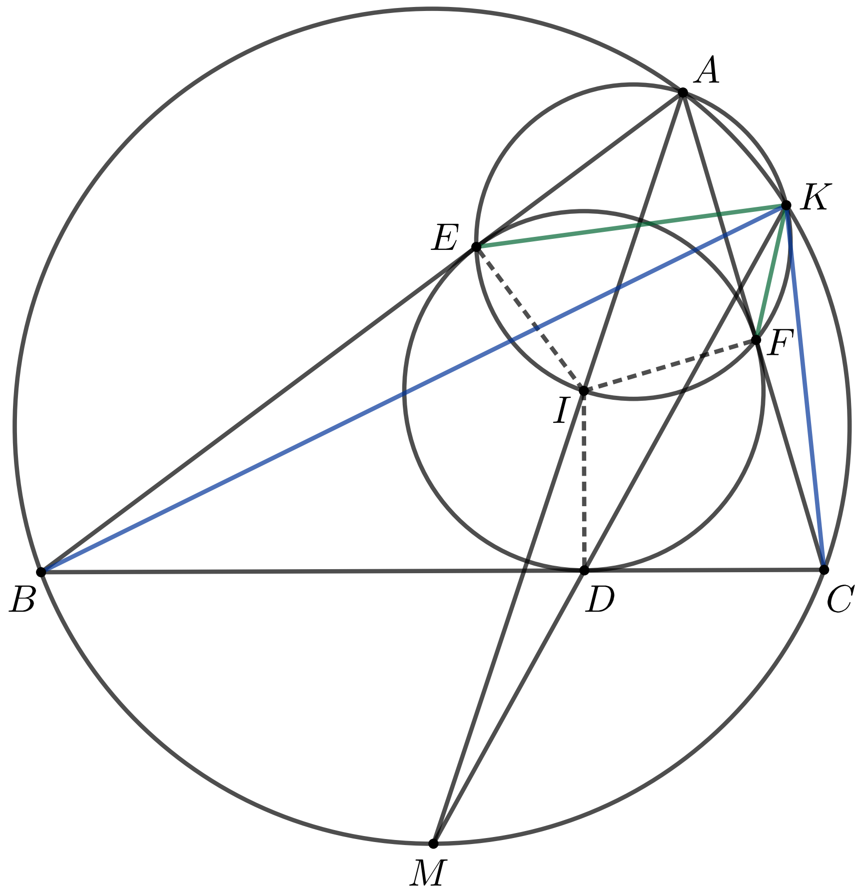
Let I be the incenter of triangle ABC. The incircle of triangle ABC is tangent to BC at D. The circle with diameter AI intersects the circumcircle of ABC at $K \neq A$. Show that the intersection of AI and KD is on the circumcircle of ABC.

British Mathematical Olympiad, round 2, 2021

Solution:
Let M the second intersection point between AI and the circumcircle. Then M is the midpoint of arc BC and we must prove that $(KD$ is the angle bisector of $\sphericalangle BKC$. If E and F are the touchpoints of the incircle with sides AB and AC, respectively, then E and F lie of the circle of diameter $[AI]$.
It follows that triangles KEB and KFC are similar ($\sphericalangle KFC = 180° - \sphericalangle KFA = 180° - \sphericalangle KEA = \sphericalangle KEB$ and $\sphericalangle KCF = \sphericalangle KBE$), therefore

$$\frac{KB}{KC} = \frac{EB}{FC} = \frac{ED}{FD}.$$

This shows that $(KD$ is the angle bisector of $\sphericalangle BKC$.



Other interesting properties of this configuration can be found in The Sharky-Devil Lemma. Thanks to *Titu Zvonaru* for pointing them out to us.