Problema săptămânii 344

Pe tablă sunt scrise iniţial numerele 1, 2, 3, 4 şi 5. O mutare constă din a şterge două dintre numerele scrise pe tablă, a şi b, şi de a scrie în locul lor numerele $a+b$ şi ab. Este posibil ca, după efectuarea a mai multe asemenea mutări, numerele scrise pe tablă să fie 21, 27, 64, 180 şi 540?

Soluţie: Este uşor de văzut că la o mutare numărul de numere divizibile cu 3 existente pe tablă nu poate să descrească:
- dacă a şi b sunt divizibile cu 3, atunci ab şi $a + b$ vor fi tot divizibile cu 3;
- dacă unul dintre numerele a şi b este divizibil cu 3, atunci ab este divizibil cu 3;
- dacă nici a, nici b nu sunt divizibile cu 3, atunci ab nu e divizibil cu 3, dar $a + b$ ar putea fi dacă a şi b dau resturi diferite la împărţirea cu 3.
Din cazurile de mai sus se vede că numarul de multipli de 3 de pe tablă creşte numai la o mutare la care a şi b dau resturile 1 şi 2 la împărţirea cu 3.
Iniţial, pe tablă era un singur multiplu de 3. La final, ar trebui să fie 4. Ne uităm la mutarea în urma căreia numărul de multipli de 3 de pe tablă a crescut la 4. Pe tablă erau 3 multipli de 3, un număr $a \equiv 1 \pmod 3$ şi un număr $b \equiv 2 \pmod 3$. A fost alese numerele a şi b şi pe tablă s-au obţinut patru multipli de 3 (cei trei existenţi anterior mutării, plus $a + b$) şi numărul $ab \equiv 2 \pmod 3$. De aici înainte, pe tablă vor rămâne mereu patru multipli de 3 şi un număr congruent cu 2 modulo 3. Aşadar, nu se va putea ajunge la numerele din enunţ deoarece printre ele se află patru multipli de 3 şi un număr, 64, congruent cu 1 modulo 3.

Am primit soluţie de la *Adrian Zanca*.

Problem of the week no. 344

Five numbers, 1, 2, 3, 4, and 5, are written on a blackboard. A student may erase any two of the numbers a and b on the board and write the numbers $a+b$ and ab replacing them. If this operation is performed repeatedly, is it possible that at some point, the five numbers written on the board are 21, 27, 64, 180, and 540?

Solution: It is easy to see that the number of multiples of three can not decrease:
- if both a and b are multiples of 3,then so will ab and $a + b$ be;
- if exactly one of the numbers a and b is a multiple of 3, then ab will be a multiple of 3, but $a + b$ won't;
- if neither a, nor b is a multiple of 3, then ab is not a multiple of 3, but $a + b$ might be, if a and b give different remainders when divided by 3.
From the analysis above, it can be seen that the number of multiples of 3 can only increase when a and b give remainders 1 and 2 when divided by 3.
Initially, there was only one multiple of 3. Assuming we could get 21, 27, 64, 180, and 540 on the board, we would have 4 multiples of 3: 21, 27, 180 and 540. We look at

the move that made the number of multiples of three become 4. Before this move, on the board we had three multiple of 3, a number $a \equiv 1 \pmod 3$ and a number $b \equiv 2 \pmod 3$. The student erased a and b from the board, wrote ab and $a+b$ instead, so that on the board there are now four multiples of 3 (the three that were there before this move, and, in addition, $a+b$). The fifth number on the board is $ab \equiv 2 \pmod 3$. From now on, whatever the subsequent moves, one the board there will always be four multiples of 3 and one number congruent to 2 modulo 3. In short: when there are four multiples of 3 on the board, the fifth number is always a number congruent to 2 modulo 3. But our fifth number, 64, is congruent to 1 modulo 3, so he can not appear on the board together with four multiples of 3.