Problema săptămânii 343

Determinaţi toate numerele naturale n pentru care cel mai mare divizor prim al lui n^2+3 este egal cu cel mai mic divizor prim al lui n^4+6.

Festivalul de Matematică, Kiev, 2018

Soluţie: (*Titu Zvonaru*)
Deoarece $n^4+6 > n^2+3$, numerele nu pot fi egale. Cele două numere trebuie să nu fie prime între ele. Fie d cel mai mare divizor comun al lor. Deoarece $n^4+6 = (n^2+3)(n^2-3)+15$, deducem că d divide 15. Cum resturile pătratice modulo 5 sunt 0, 1, 4, rezultă că numărul n^2+3 nu se divide cu 5. Rămâne posibilitatea $d=3$. Deoarece cel mai mic divizor prim al lui n^4+6 este 3, n este impar. Să determinăm n astfel încât singurii divizori primi ai numărului n^2+3 să fie 2 şi 3. Pentru $n=3a$, trebuie ca $9a^2+3 = 3^q \cdot 2^p$. Obținem $q=1$ şi $3a^2 = 2^p-1$. Numărul 2^p-1 se divide cu 3 dacă şi numai dacă p este par, adică $p=2t$. Rămâne ecuația $3a^2 = 4^t-1$. Pentru $t=1$ obținem $a=1$, deci $n=3$. Dacă $t>1$, atunci $4^t = M8$; cum $3a^2 \equiv 0,3,4 \pmod 8$, nu avem soluții. Aşadar $n=3$ este singura soluţie. Numerele sunt $n^2+3 = 12 = 2^2 \cdot 3$ şi $n^4+6 = 87 = 3 \cdot 29$.

Am primit soluţii de la: *Titu Zvonaru* şi .

Problem of the week no. 343

Find all positive integers n for which the largest prime divisor of n^2+3 is equal to the least prime divisor of n^4+6.

Kyiv Mathematical Festival, 2018

Solution: (*Titu Zvonaru*) As $n^4+6 > n^2+3$, the numbers can not be equal. The two numbers can't be co-prime. Let d be their greatest common divisor. As $n^4+6 = (n^2+3)(n^2-3)+15$, if follows that d divides 15. The quadratic residues modulo 5 are 0, 1, 4, therefore n^2+3 is not a multiple of 5. Thus we must have $d=3$. The greatest common divisor of n^4+6 is 3, so n is odd. Let us determine n such that the only prime divisors of n^2+3 are 2 and 3. For $n=3a$ we must have $9a^2+3 = 3^q \cdot 2^p$. We get $q=1$ and $3a^2 = 2^p-1$. The number 2^p-1 is a multiple of 3 if and only if p is even, i.e. $p=2t$. This leaves us with the equation $3a^2 = 4^t-1$. For $t=1$ we obtain $a=1$, and $n=3$. If $t>1$, then $4^t = M8$; as $3a^2 \equiv 0,3,4 \pmod 8$, there are no solutions in this case. Thus $n=3$ is the only solution. The numbers are $n^2+3 = 12 = 2^2 \cdot 3$ and $n^4+6 = 87 = 3 \cdot 29$.