

Problema săptămânii 342

Fie $x, y \in \mathbb{R}$ astfel încât $x = y(3 - y)^2$ și $y = x(3 - x)^2$. Aflați toate valorile posibile ale sumei $x + y$.

Baltic Way, 2021

Soluție: (*Titu Zvonaru*)

Înlocuind pe y în prima relație obținem ecuația

$$x = x(3 - x)^2(3 - x(3 - x)^2)^2.$$

Dacă $x = 0$, atunci $y = 0$.

Rămân de rezolvat ecuațiile

$$(3 - x)(3 - 9x + 6x^2 - 9x^3) = 1 \quad (1)$$

și

$$(3 - x)(3 - 9x + 6x^2 - 9x^3) = -1. \quad (2)$$

Ecuația (1) este echivalentă cu $(x - 2)(x - 4)(x^2 - 3x + 1) = 0$, iar ecuația (2) este echivalentă cu $(x^2 - 4x + 2)(x^2 - 5x + 5) = 0$. Obținem toate soluțiile sistemului dat:

$$(0, 0), (2, 2), (4, 4), \left(\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}, \frac{3 \mp \sqrt{5}}{2} \right), (2 \pm \sqrt{2}, 2 \mp \sqrt{2}), \left(\frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}, \frac{5 \mp \sqrt{5}}{2} \right).$$

Rezultă că valorile posibile ale sumei sunt 0, 3, 4, 5 și 8.

Am primit soluții de la *Titu Zvonaru* și *Adrian Zanca*.

Problem of the week no. 342

Let $x, y \in \mathbb{R}$ be such that $x = y(3 - y)^2$ and $y = x(3 - x)^2$. Find all possible values of $x + y$.

Baltic Way, 2021

Solution: (*Titu Zvonaru*)

Plugging y into the first equation we get

$$x = x(3 - x)^2(3 - x(3 - x)^2)^2.$$

We have $x = 0$ if and only if $y = 0$.

In the remaining cases, we need to solve

$$(3 - x)(3 - 9x + 6x^2 - 9x^3) = 1 \quad (1)$$

and

$$(3 - x)(3 - 9x + 6x^2 - 9x^3) = -1. \quad (2)$$

Equation (1) can be written equivalently $(x-2)(x-4)(x^2-3x+1) = 0$, while equation (2) is equivalent to $(x^2 - 4x + 2)(x^2 - 5x + 5) = 0$. We obtain all the solutions of the system:

$$(0, 0), (2, 2), (4, 4), \left(\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}, \frac{3 \mp \sqrt{5}}{2} \right), (2 \pm \sqrt{2}, 2 \mp \sqrt{2}), \left(\frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}, \frac{5 \mp \sqrt{5}}{2} \right).$$

It follows that the possible values of the sum $x + y$ are 0, 3, 4, 5 and 8.

Other solutions can be found on AoPS.