



**Secțiunea Juniori**  
**Simulare 2 - Baraj juniori**  
**04 Martie 2023**

**- Subiecte -**

**Selecție probleme**  
**Andrei Eckstein**

## §1 Subiecte

### Problema 1

Determinați numerele naturale  $n$ ,  $n \geq 3$ , cu proprietatea că există  $n$  numere naturale impare  $a_1, a_2, \dots, a_n$  astfel încât  $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ .

### Problema 2

Fie  $H$  și  $O$  ortocentrul, respectiv centrul cercului circumscris triunghiului ascuțitunghic  $ABC$ . Punctele  $A_1$ ,  $B_1$  și  $C_1$  sunt picioarele înălțimilor din  $A$ ,  $B$ , respectiv  $C$ , iar  $C_2$  este simetricul lui  $C$  față de  $A_1B_1$ . Demonstrați că punctele  $H$ ,  $O$ ,  $C_1$  și  $C_2$  sunt conciclice.

### Problema 3

Fie  $a$  și  $b$  două numere naturale prime între ele. Un pion este plasat în plan într-un punct de coordonate  $(x, y)$ , cu  $x, y \in \mathbb{Z}$ . O mutare de tipul A constă din a muta pionul într-unul din punctele:  $(x + a, y + a)$ ,  $(x + a, y - a)$ ,  $(x - a, y + a)$  sau  $(x - a, y - a)$ . O mutare de tipul B constă în a muta pionul din  $(x, y)$  într-unul din punctele:  $(x + b, y + b)$ ,  $(x + b, y - b)$ ,  $(x - b, y + b)$  sau  $(x - b, y - b)$ .

Pionul este poziționat inițial în punctul de coordonate  $(0, 0)$ . Puteți face oricâte mutări (număr finit), alternând mutările de tipul A cu cele de tipul B. Prima mutare trebuie să fie de tipul A. Puteți efectua un număr impar sau un număr par de mutări, adică ultima mutare poate fi de tipul A sau de tipul B. Determinați mulțimea punctelor din plan în care poate ajunge pionul după o asemenea succesiune de mutări.

### Problema 4

Fie  $a, b, c \geq 0$  numere reale. Demonstrați că

$$\frac{a^3 + bc(b + c)}{b^3 + c^3} + \frac{b^3 + ca(c + a)}{c^3 + a^3} + \frac{c^3 + ab(a + b)}{a^3 + b^3} \geq 3.$$

Care sunt cazurile de egalitate?

*Timp de lucru: 240 de minute.*

*Pentru fiecare problemă se acordă maxim 7 puncte.*

*Nu este permisă utilizarea calculatorului sau a oricărui alt instrument, cu excepția riglei și a compasului.*