BARAJ DE JUNIORI
Arabia Saudită, barajul 2, 2022

Problema 1. Determinaţi toate perechile de numere naturale prime (p, q) astfel încât
$$p^5 + p^3 + 2 = q^2 - q.$$

Problema 2. Ştiind că numerele reale nenegative a, b, c satisfac condiţia $a^2 + b^2 + c^2 = 2$, aflaţi valoarea maximă a expresiei
$$P = \frac{\sqrt{b^2 + c^2}}{3 - a} + \frac{\sqrt{a^2 + c^2}}{3 - b} + a + c - 2022c.$$

Problema 3. Fie BB_1 şi CC_1 înălţimi în triunghiul ascuţitunghic ABC şi fie A_0 mijlocul lui BC. Dreptele A_0B_1 şi A_0C_1 intersectează paralela prin A la BC în punctele P şi Q. Demonstraţi că centrul cercului înscris în triunghiul PA_0Q se află pe înălţimea din A a triunghiului ABC.

Problema 4. Eşti pe cale de a-ţi organiza aniversarea zilei de naştere la care ştii că vor participa fie m persoane, fie n persoane (încă nu ştii sigur). Ai un tort mare şi vrei sl tai în mai multe bucăţi, nu neapărat egale, astfel încât să poţi oferi tuturor invitaţilor aceeaşi cantitate de tort. (Un invitat poate primi o bucată mai mare sau mai multe bucăţi mai mici, mărimea bucăţilor poate să difere.) Care este numărul minim de bucăţi în care trebuie să tai tortul pentru a-l putea împărţi în mod egal între invitaţi, indiferent de faptul că numărul acestora este m sau n.

Timp de lucru: 4 ore şi 30 de minute

Soluţii oficiale:

Problema 1. Determinaţi toate perechile de numere naturale prime (p, q) astfel încât

$$p^5 + p^3 + 2 = q^2 - q.$$

Soluţie:
Ştim că $p^3(p^2 + 1) = (q + 1)(q - 2)$. Dacă p divide atât $q - 1$ cât şi $q + 2$, atunci $p = 3$, de unde soluţia $(p, q) = (3, 17)$.
Să presupunem acum că $p \neq 3$. Atunci unul dintre numerele $q - 1$ şi $q + 2$ trebuie să fie divizibil cu p^3, iar celălalt să îl dividă pe $p^2 + 1$. Rezultă că $q + 1 \geq p^3$ şi $q-2 \leq p^2+1$, deci $p^3 \leq p^2+4$. De aici rezultă imediat $p = 2$ şi soluţia $(p, q) = (2, 7)$.

Problema 2. Ştiind că numerele reale nenegative a, b, c satisfac condiţia $a^2 + b^2 + c^2 = 2$, aflaţi valoarea maximă a expresiei

$$P = \frac{\sqrt{b^2 + c^2}}{3 - a} + \frac{\sqrt{a^2 + c^2}}{3 - b} + a + c - 2022c.$$

Soluţie:
Mai întâi vom demonstra că $4\sqrt{b^2 + c^2} \leq (3-a)^2$. Să observăm că $b^2+c^2 = 2-a^2$, deci avem de demonstrat că $4\sqrt{2 - a^2} \leq (3-a)^2$. Conform inegalităţii dintre media aritmetică şi cea geometrică, avem

$$4\sqrt{2 - a^2} = 4\sqrt{1 \cdot (2 - a^2)} \leq 4 \cdot \frac{1 + (2 - a^2)}{2} = 2(3 - a^2).$$

Este suficient să demonstrăm că $2(3 - a^2) \leq (3 - a)^2$, inegalitate care revine la $3(a^2 - 2a + 1) \geq 0$, adică la $3(a - 1)^2 \geq 0$, care este adevărată.
De aici putem deduce că $\dfrac{\sqrt{b^2 + c^2}}{3 - a} \leq \dfrac{3 - a}{4}$. Analog, $\dfrac{\sqrt{c^2 + a^2}}{3 - b} \leq \dfrac{3 - b}{4}$. Atunci

$$P \leq \frac{3 - a}{4} + \frac{3 - b}{4} + a + b - 2022 \leq \frac{6 + 3(a + b)}{4}.$$

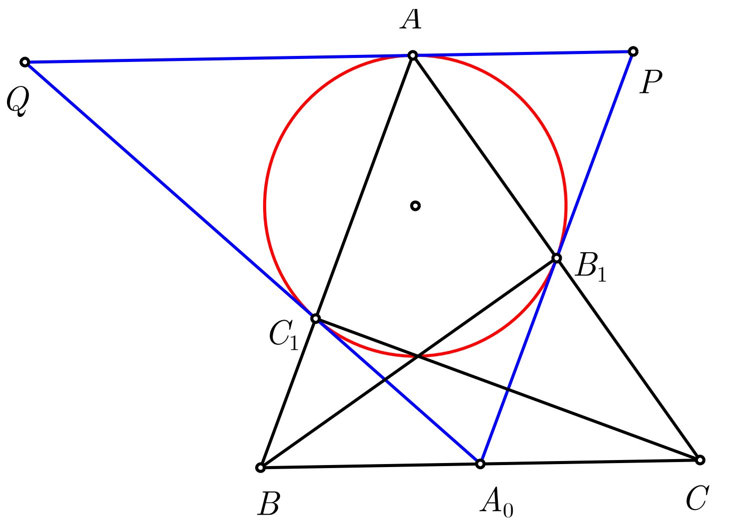
Din cunoscuta inegalitate

$$(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2) \leq 2(a^2 + b^2 + c^2) = 4$$

rezultă $a + b \leq 2$, deci $P \leq \dfrac{6 + 3 \cdot 2}{4} = 3$. Astfel, valoarea maximă a lui P este 3, ea atingându-se atunci când $a = b = 1$, $c = 0$.

Problema 3. Fie BB_1 şi CC_1 înălţimi în triunghiul ascuţitunghic ABC şi fie A_0 mijlocul lui BC. Dreptele A_0B_1 şi A_0C_1 intersectează paralela prin A la BC în punctele P şi Q. Demonstraţi că centrul cercului înscris în triunghiul PA_0Q se află pe înălţimea din A a triunghiului ABC.

Soluţie:



Deoarece triunghiurile BCB_1 şi BCC_1 sunt dreptunghice, medianele lor, B_1A_0 şi C_1A_0 sunt egale cu jumătate din ipotenuza BC, adică $B_1A_0 = A_0C = A_0B = C_1A_0$.
Avem $\sphericalangle PB_1A \equiv \sphericalangle CB_1A_0 \equiv \sphericalangle B_1CA_0 \equiv \sphericalangle PAC$, deci $PA = PB_1$. Analog, $QA = QC_1$. Atunci centrul cercului înscris în triunghiul A_0PQ este tangent laturilor acestuia în punctele B_1, A şi C_1. Dar centrul cercului circumscris triunghiului AB_1C_1 este mijlocul segmentului AH, unde H este ortocentrul, deci se află pe înălţimea din A.

Problema 4. Eşti pe cale de a-ţi organiza aniversarea zilei de naştere la care ştii că vor participa fie m persoane, fie n persoane (încă nu ştii sigur). Ai un tort mare şi vrei sl tai în mai multe bucăţi, nu neapărat egale, astfel încât să poţi oferi tuturor invitaţilor aceeaşi cantitate de tort. (Un invitat poate primi o bucată mai mare sau mai multe bucăţi mai mici, mărimea bucăţilor poate să difere.) Care este numărul minim de bucăţi în care trebuie să tai tortul pentru a-l putea împărţi în mod egal între invitaţi, indiferent de faptul că numărul acestora este m sau n.

Soluţie:
Vom demonstra că rezultatul este $m + n - (m, n)$. Mai întâi, să observăm că dacă reprezentăm tortul sub forma intervalului $[0, 1]$ şi tacem tăieturi în punctele de coordonate $\frac{k}{m}$ $(0 < k < m)$ şi $\frac{j}{n}$ $(0 < j < n)$, atunci cu bucăţile formate vom putea uşor satisface cerinţa (ignorăm tăieturile $\frac{k}{m}$ dacă sunt n invitaţi, respectiv tăieturile $\frac{j}{n}$ dacă sunt m invitaţi). În total, sunt $m - 1$ tăieturi de forma $\frac{k}{m}$ şi $n - 1$ tăieturi de forma $\frac{j}{n}$. Dintre acestea, $(m, n) - 1$ coincid. Astfel, vor fi $m + n - (m, n) - 1$ tăieturi, deci se vor forma $m + n - (m, n)$ bucăţi.
Să demonstrăm acum că acesta este numărul minim de bucăţi. În acest scop considerăm un graf bipartit în care vârfurile unei părţi corespund celor m persoane participante, iar cele din cealaltă parte corespund celor n persoane participante. Pentru fiecare bucată de tort ne uităm la cele două persoane care ar urma să

primească respectiva bucată de tort dacă la petrecere participă m persoane, respectiv n persoane. Unim cu muchii vârfurile corespunzătoare celor două persoane. Ne uităm la o componentă conexă a grafului. Atunci, dacă într-o parte sunt m_1 din cele m vârfuri, iar în cealaltă parte sunt n_1 din cele n vârfuri, atunci muchiile din această componentă conexă a grafului unui bucăţi de tort reprezentând $\dfrac{m_1}{m} = \dfrac{n_1}{n}$ din tortul întreg. Rezultă că $m_1 \geq \dfrac{m}{(m,n)}$.

Aşadar, numărul de componente conexe este cel mult (m,n). Graful are $m+n$ vârfuri şi cel mult (m,n) componente conexe, deci numărul muchiilor este cel puţin $m+n-(m,n)$. (Egalitatea se atinge atunci când fiecare componentă conexă este un arbore.)