BARAJ DE JUNIORI
Arabia Saudită, barajul 1, 2022

Problema 1. Un număr natural $n > 3$ este ,,*drăguţ*" dacă şi numai dacă numerele $n+1$ şi $8n+1$ sunt pătrate perfecte. Câte numere naturale nenule $k \leq 15$ au proprietatea că $4n+k$ este număr compus pentru orice număr drăguţ n?

Problema 2. Fie BB' şi CC' înălţimi în triunghiul ascuţitunghic ABC. Două cercuri care trec prin A şi C' sunt tangente dreptei BC în punctele P şi Q. Demonstraţi că punctele A, B', P şi Q sunt conciclice.

Problema 3. Pe tablă se scriu 2000 de numere întregi consecutive, nu neapărat pozitive. Un elev face mai multe mutări. La fiecare mutare, el grupează cele 2000 de numere în 1000 de perechi şi înlocuieşte fiecare pereche cu diferenţa şi suma numerelor din respectiva pereche. (Diferenţa nu trebuie să fie pozitivă, elevul putând să scadă numărul mai mare din numărul mai mic.) În plus, toate operaţiile se fac simultan. Demonstraţi că numerele scrise pe tablă nu vor mai fi niciodată 2000 de numere consecutive.

Problema 4. Determinaţi cel mai mic număr natural a pentru care există un număr prim p şi un număr natural $b \geq 2$ astfel încât

$$\frac{a^p - a}{p} = b^2.$$

Timp de lucru: 4 ore şi 30 de minute

Soluţii oficiale:

Problema 1. Un număr natural $n > 3$ este ,,*drăguţ*" dacă şi numai dacă numerele $n+1$ şi $8n+1$ sunt pătrate perfecte. Câte numere naturale nenule $k \leq 15$ au proprietatea că $4n+k$ este număr compus pentru orice număr drăguţ n?

Soluţie:
Mai întâi, să observăm că restul împărţirii la 3 al oricărui pătrat perfect este 0 sau 1. Astfel, $n+1$ - pătrat perfect implică $n \equiv 0, 2 \mod 3$, iar $8n+1$ - pătrat perfect implică $n \equiv 0, 1 \mod 3$. Aşadar, dacă n este drăguţ, atunci n este multiplu de 3. Este uşor de verificat că 15 este cel mai mic număr drăguţ.
Atunci toate numerele pare k vor satisface condiţia deoarece este, în acest caz, număr par, mai mare ca 2, deci număr compus.
Similar, toate numerele k divizibile cu 3 satisfac şi ele condiţia deoarece $n+k$ este divizibil cu 3, mai mare ca 3, deci compus. Mai rămâne de verificat condiţia pentru $k \in \{1, 5, 7, 11, 13\}$. În particular, pentru $n = 15$, rezultă că este necesar ca $60+k$ să fie compus. Dar $60+1 = 61$, $60+7 = 67$, $60+11 = 71$ şi $60+13 = 73$ sunt toate prime, deci $k = 1, 7, 11, 13$ nu satisfac condiţia.
În fine, vom demonstra că şi $k = 5$ satisface condiţia. Este uşor de verificat că

$$x(n+1) + y(8n+1) = 4n+5, \ \forall\, n \Leftrightarrow x = \frac{36}{7}\,,\ y = -\frac{1}{7},$$

astfel că

$$7(4n+5) = 36(n+1) - (8n+1) = 36a^2 - b^2 = (6a-b)(6a+b),$$

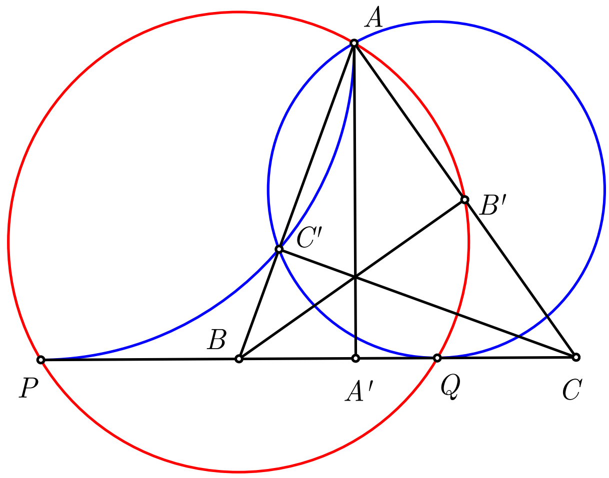
cu $a, b \in \mathbb{N}^*$. Dar

$$6a - b = 6\sqrt{n+1} - \sqrt{8n+1} \geq 3\sqrt{n+1} \geq 12.$$

Aşadar, dacă $4n+5 > 7$ este prim, atunci trebuie ca $6a-b = 7$ şi $6a+b = 4n+5$, ceea ce contrazice $6a - b \geq 12$. Aşadar, $4n+5$ este compus.
Aşadar, sunt 11 numere k cu proprietatea dorită: 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 14 şi 15.

Problema 2. Fie BB' şi CC' înălţimi în triunghiul ascuţitunghic ABC. Două cercuri care trec prin A şi C' sunt tangente dreptei BC în punctele P şi Q. Demonstraţi că punctele A, B', P şi Q sunt conciclice.

Soluţie:



Deoarece $BP^2 = BQ^2 = BA \cdot BC'$, iar patrulaterele $AC'A'C$ şi $AB'A'B$ sunt inscriptibile (AA' e înălţime), avem

$$CP \cdot CQ = CB^2 - BP^2 = CB^2 - BA \cdot BC' = BC^2 - BC \cdot BA' = BC \cdot CA' = CA \cdot CB'.$$

De aici concluzia rezultă în mod evident.

Problema 3. Pe tablă se scriu 2000 de numere întregi consecutive, nu neapărat pozitive. Un elev face mai multe mutări. La fiecare mutare, el grupează cele 2000 de numere în 1000 de perechi şi înlocuieşte fiecare pereche cu diferenţa şi suma numerelor din respectiva pereche. (Diferenţa nu trebuie să fie pozitivă, elevul putând să scadă numărul mai mare din numărul mai mic.) În plus, toate operaţiile se fac simultan. Demonstraţi că numerele scrise pe tablă nu vor mai fi niciodată 2000 de numere consecutive.

Soluţie:
Observăm că $(a-b)^2 + (a+b)^2 = 2(a^2+b^2)$, astfel ca suma pătratelor numerelor de pe tablă se dublează la fiecare mutare. De asemenea,

$$n^2 + (n+1)^2 + \ldots + (n+1999)^2 = 2000n^2 + 1999 \cdot 2000n + \frac{1999 \cdot 2000 \cdot 3999}{6},$$

care este congruent cu 8 modulo 16. Evident, atunci când înmulţim această sumă cu 2 vom obţin un număr divizibil cu 16, astfel că ea nu va mai fi niciodată o sumă de 2000 de numere consecutive.

Problema 4. Determinaţi cel mai mic număr natural a pentru care există un număr prim p şi un număr natural $b \geq 2$ astfel încât

$$\frac{a^p - a}{p} = b^2.$$

Soluţie:
Dacă $p = 2$, ecuaţia noastră devine $a(a-1) = 2b^2$. Cea mai mică soluţie naturală a acesteia este $a = 9$.
Fie de-acum $p \geq 3$. Deoarece a şi $a^{p-1} - 1$ sunt prime între ele şi $a(a^{p-1} - 1) = pb^2$, unul dintre numerele a şi $a^{p-1} - 1$ trebuie să fie pătrat perfect. Cum a^{p-1} este pătrat perfect, $a^{p-1} - 1$ nu poate fi pătrat perfect, deci a este pătrat perfect. Singurele pătrate perfecte mai mici ca 9 sunt 1 şi 4, iar $a = 1$ nu convine. Fie aşadar $a = 4$. Atunci

$$\frac{4^{p-1} - 1}{p} = \frac{(2^{p-1} - 1)(2^{p-1} + 1)}{p}$$

este pătrat perfect, deci fie $2^{p-1} - 1$, fie $2^{p-1} + 1$ este pătrat perfect. Dar $2^{p-1} - 1 \equiv 3 \pmod 4$, deci $2^{p-1} - 1$ nu este pătrat perfect. Rămâne că $2^{p-1} + 1 = c^2$. Atunci $2^{p-1} = (c-1)(c+1)$, deci şi $c - 1$ şi $c + 1$ sunt puteri ale lui 2, deci ele trebuie să fie 2 şi 4. Dar atunci $p = 4$, contradicţie.
În concluzie, răspunsul este $a = 9$.