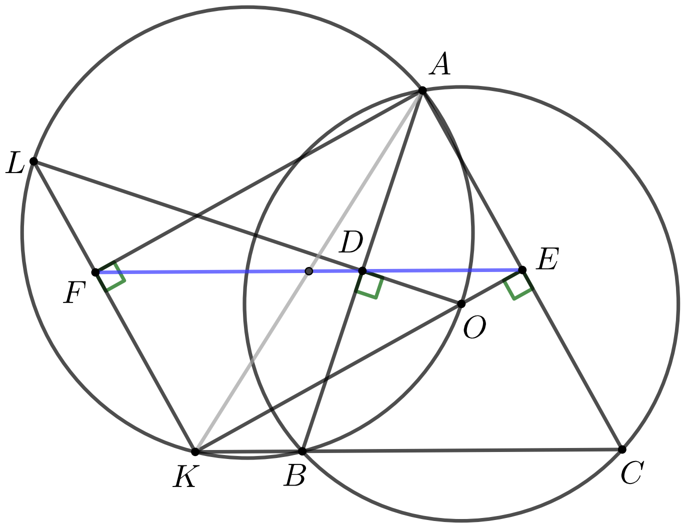
Problema săptămânii 341

Fie D şi E mijloacele laturilor AB, respectiv AC, ale triunghiului ABC, iar O centrul cercului circumscris acestuia. Fie K punctul de intersecţie a dreptelor OE şi BC şi L al doilea punct de intersecţie dintre dreapta OD şi cercul circumscris triunghiului OKB. Notăm cu F proiecţia lui A pe dreapta KL. Demonstraţi că punctele D, E şi F sunt coliniare.

antrenament Franţa, 2022-2023

Soluţia 1: (*Titu Zvonaru*)
Presupunem că triunghiul este ascuţitunghic şi că $AB > BC$ (raţionamentul este similar dacă triunghiul nu este ascuţitunghic sau dacă $AB < BC$). În acest caz $B \in (CK)$. Deoarece $\sphericalangle OKB = 90° - C$ şi $\sphericalangle BAO = 90° - C$, patrulaterul $AKBO$ este inscriptibil. Deducem că centrul cercului circumscris triunghiului OKB se află pe mediatoarea OD a laturii AB. Obţinem $\sphericalangle LKO = 90°$. Patrulaterul $AFKE$ are trei unghiuri drepte ($\sphericalangle AFK = \sphericalangle FKE = \sphericalangle AEK = 90°$), deci este dreptunghi. Rezultă că diagonala EF trece prin mijlocul diagonalei AK, adică este paralelă cu BC. Obţinem că punctele D, E şi F sunt coliniare.



Soluţia 2: (*Alexandru Ciobotea*)
Ca mai sus se arată că punctele A, O, K, B, L sunt conciclice. Deoarece D, E şi F sunt proiecţiile lui A pe laturile OL, OK, respectiv KL ale triunghiului OKL, cele trei puncte se află pe dreapta lui Simson corespunzătoare lui A şi triunghiului OKL, deci sunt coliniare.

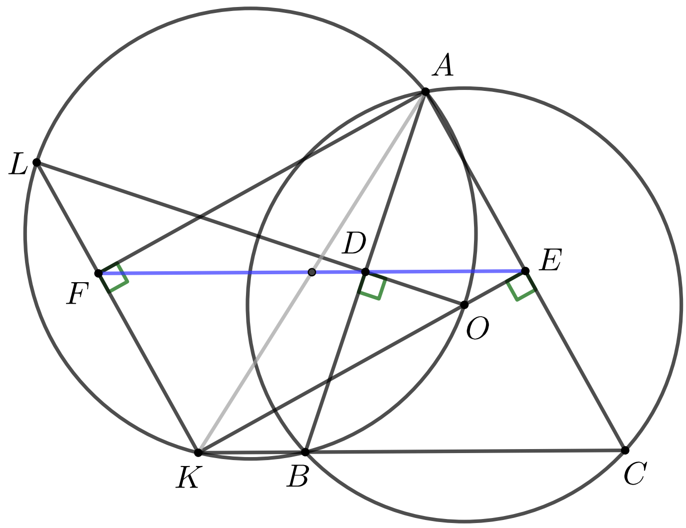
Am primit soluţii de la: *Titu Zvonaru, Alexandru Ciobotea* şi *Alin Creţu.*

Problem of the week no. 341

Let D and E be the midpoints of sides AB and AC, respectively, of triangle ABC, and let O be the circumcenter of the triangle. Let K be the intersection point between lines OE and BC. Line OD meets the circumcircle of OKB again at L. Let F be the projection of A on the line KL. Prove that points D, E and F are collinear.

French training, 2022-2023

Solution 1: (*Titu Zvonaru*)
Assume that the triangle is acute and $AB > BC$ (the reasoning is the same in the other cases). In this case, $B \in (CK)$. As $\sphericalangle OKB = 90° - C$ and $\sphericalangle BAO = 90° - C$, the quadrilateral $AKBO$ is cyclic. It follows that the circumcenter of triangle OKB lies on the perpendicular bisector, OD, of the side AB. We obtain $\sphericalangle LKO = 90°$. The quadrilateral $AFKE$ has three right angles ($\sphericalangle AFK = \sphericalangle FKE = \sphericalangle AEK = 90°$), therefore it is a rectangle. It follows that the diagonal EF passes through the midpoint of the diagonal AK, i.e. it is parallel to BC. But so is DE. We obtain that points D, E and F are collinear.



Solution 2: (*Alexandru Ciobotea*)
As above, one proves that points A, O, K, B, L are on the same circle. As D, E and F are the projections of A on the sides OL, OK, and KL, respectively, of triangle OKL, these three points belong to the Simson line corresponding to the points A and the triangle OKL, hence they are collinear.