Problema săptămânii 340

La o petrecere, n băieţi dansează cu n fete. Se constată că, în fiecare pereche, diferenţa de înălţime dintre băiat şi fată este mai mică de 10 cm. Demonstraţi că, pentru orice $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, diferenţa de înălţime dintre cel de-al k-lea cel mai înalt băiat şi cea de-a k-a cea mai înaltă fată este de asemenea mai mică de 10 cm.

A.G. Pechkovskiy, Turneul Oraşelor, 1984

Soluţie: Fie $b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_n$ înălţimile băieţilor şi $f_1 \geq f_2 \geq \ldots \geq f_n$ înălţimile fetelor. Presupunem prin absurd că ar exista un indice k astfel încât $|b_k - f_k| \geq 10$. Datorită simetriei dintre şirul de băieţi şi cel de fete, putem presupune că $b_k - f_k \geq 10$. Atunci $b_i - f_j \geq b_k - f_k \geq 10$ pentru orice $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ şi orice $j \in \{k, k+1, \ldots, n\}$. Dacă ne uităm la grupul format din băieţii cu înălţimile $b_1, b_2, \ldots, b_k$ împreună cu fetele având înălţimile $f_k, f_{k+1}, \ldots, f_n$, avem un grup format din $n + 1$ persoane. Din principiul cutiei rezultă că în acest grup există două persoane care au dansat împreună, ceea ce contrazice faptul că diferenţa de înălţime dintre ele este de cel puţin 10 cm. Contradicţia la care s-a ajuns arată că presupunerea făcută este falsă, deci că $|b_k - f_k| < 10$, $\forall\, k \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Problem of the week no. 340

At a party, n boys and n girls are paired. It is observed that in each pair, the difference in height is less than 10 cm. Show that the difference in height between the k-th tallest boy and the k-th tallest girl is also less than 10 cm for $k = 1, 2, \ldots, n$.

A.G. Pechkovskiy, Tournament of Towns, 1984

Soluţion: Let $b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_n$ the heights of the boys and $g_1 \geq g_2 \geq \ldots \geq g_n$ the heights of the girls. Assume there exists an integer k such that $|b_k - g_k| \geq 10$. Because of the symmetry between the two sequences, we may assume that $b_k - g_k \geq 10$. Then $b_i - g_j \geq b_k - g_k \geq 10$ for all $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ and all $j \in \{k, k+1, \ldots, n\}$. Consider the group consisting of the boys of heights $b_1, b_2, \ldots, b_k$ together with the girls of heights $g_k, g_{k+1}, \ldots, g_n$. There are $n + 1$ people in this group. By the Pigeonhole Principle, it follows that there are two person in this group that are part of the same initial pair. But this contradicts the fact that their difference in heights is at least 10 cm. Thus, our supposition turn out to be false, which means that $|b_k - g_k| < 10$, $\forall\, k \in \{1, 2, \ldots, n\}$.