Problema săptămânii 339

Un triplet de numere naturale nenule (a, b, c) se numeşte *brazilian* dacă

$$a \mid bc + 1, \qquad b \mid ac + 1, \qquad c \mid ab + 1.$$

Determinaţi toate tripletele braziliene.

Junior Olimpiad, Brazil, 2021

Soluţie: (*Ioan Viorel Codreanu*)
Dacă $a = b$, atunci $a \mid ac + 1$, de unde rezultă că $a \mid 1$, adică $a = b = 1$ și $c \mid 2$. Obținem soluțiile $(a, b, c) = (1, 1, 1)$ şi $(a, b, c) = (1, 1, 2)$. Analog, dacă $a = c$ sau $b = c$, obținem soluțiile $(a, b, c) = (1, 1, 1)$, $(a, b, c) = (2, 1, 1)$ şi $(a, b, c) = (1, 2, 1)$.

Datorită simetriei relațiilor de divizibilitate, putem presupune în continuare că $1 \leq a < b < c$. Avem $abc \mid (bc+1)(ca+1)(ab+1)$, sau $abc \mid a^2b^2c^2+abc(a+b+c)+ab+bc+ca+1$, de unde obținem că $abc \mid ab+bc+ca+1$, și atunci $abc \leq ab+bc+ca+1$. Vom arăta că nu putem avea $a \geq 3$. Într-adevăr, dacă $a \geq 3$, atunci $abc \geq 3bc \geq bc+(a+1)c+(a+2)b > ab + bc + ca + 1$, contradicție cu $abc \leq ab + bc + ca + 1$.

Dacă $a = 1$, atunci $c \mid b + 1$, de unde obținem că $c \leq b + 1$. Dar, cum $c \geq b + 1$, obținem că $c = b+1$. Din $b \mid b+2$ rezultă că $b \mid 2$. Cum $b \geq 2$, obținem că $b = 2$ și $c = 3$.

Dacă $a = 2$, atunci $c \mid 2b + 1$, adică există numărul natural nenul d, astfel încât $2b+1 = cd$. Observăm că $d = 1$. Într-adevăr, dacă $d \geq 2$, atunci $2b+1 = cd \geq 2(b+1)$, contradicție. Avem $c = 2b + 1$, și atunci $b \mid 4b + 3$, de unde deducem că $b \mid 3$. Cum $b \geq 2$, obținem că $b = 3$ și $c = 7$.

Așadar, tripletele braziliene sunt $(1, 1, 1)$, $(2, 1, 1)$, $(1, 2, 1)$, $(1, 1, 2)$, $(1, 2, 3)$, $(1, 3, 2)$, $(2, 1, 3)$, $(2, 3, 1)$, $(3, 1, 2)$, $(3, 2, 1)$, $(2, 3, 7)$, $(2, 7, 3)$, $(3, 2, 7)$, $(3, 7, 2)$, $(7, 2, 3)$ şi $(7, 3, 2)$.

O problemă asemănătoare este şi problema săptămânii 107.

O problemă înrudită:

Fie $n > 2$ un număr natural. Să se arate că există $a_1, a_2, \ldots, a_n$ numere naturale mai mari ca 1astfel încât, pentru orice $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ să avem $a_k \mid \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} a_i + 1$.

Titu Zvonaru, GM nr. 2/1999

Se pot alege numerele $a_1 = 2$, $a_2 = 2 + 1$, $a_3 = 2 \cdot 3 + 1$, $\ldots$, $a_k = \prod_{j=1}^{k-1} a_j + 1$, $\ldots$.

Am primit soluţii de la *Ioan Viorel Codreanu* şi *Daniel Văcaru*.

Problem of the week no. 339

A triple of positive integers (a,b,c) is *brazilian* if

$$a \mid bc+1, \qquad b \mid ac+1, \qquad c \mid ab+1.$$

Determine all the brazilian triples.

Junior Olympiad, Brazil, 2021

Solution: (*Ioan Viorel Codreanu*)
If $a=b$, then $a \mid ac+1$, hence $a \mid 1$, i.e. $a=b=1$ and $c \mid 2$. We obtain $(a,b,c)=(1,1,1)$ and $(a,b,c)=(1,1,2)$. Similarly, if $a=c$ or $b=c$, we get $(a,b,c)=(1,1,1)$, $(a,b,c)=(2,1,1)$ and $(a,b,c)=(1,2,1)$.

In the sequel, because of symmetry, we may assume $1 \le a < b < c$. Then $abc \mid (bc+1)(ca+1)(ab+1)$, i.e. $abc \mid a^2b^2c^2+abc(a+b+c)+ab+bc+ca+1$, hence $abc \mid ab+bc+ca+1$ and, therefore, $abc \le ab+bc+ca+1$. We prove that we can not have $a \ge 3$. Indeed, if $a \ge 3$, then $abc \ge 3bc \ge bc+(a+1)c+(a+2)b > ab+bc+ca+1$, which contradicts $abc \le ab+bc+ca+1$.

If $a=1$, then $c \mid b+1$, hence $c \le b+1$. But, as $c \ge b+1$, we get $c=b+1$. From $b \mid b+2$ it follows that $b \mid 2$. As $b \ge 2$, we get $b=2$ and $c=3$.

If $a=2$, then $c \mid 2b+1$, i.e. there exists a positive integer d such that $2b+1=cd$. We prove that $d=1$. Indeed, assuming $d \ge 2$, we have $2b+1=cd \ge 2(b+1)$, contradiction. Thus, $c=2b+1$, and then $b \mid 4b+3$, hence $b \mid 3$. As $b \ge 2$, we get $b=3$ and $c=7$.

In conclusion, the brazilian triples are $(1,1,1)$, $(2,1,1)$, $(1,2,1)$, $(1,1,2)$, $(1,2,3)$, $(1,3,2)$, $(2,1,3)$, $(2,3,1)$, $(3,1,2)$, $(3,2,1)$, $(2,3,7)$, $(2,7,3)$, $(3,2,7)$, $(3,7,2)$, $(7,2,3)$ and $(7,3,2)$.

A similar solution can be found on AoPS.

Compare this problem to the problem of week number 107.