BARAJ DE JUNIORI „Euclid”
Cipru, 18 februarie 2023 (barajul 2)

Problema 1. Aflaţi toate numerele naturale nenule n, k pentru care $3 \cdot 2^k + 1 = n^2$.

Problema 2. Numerele naturale nenule a, b, c satisfac relaţia

$$\frac{a^2 - a - c}{b} + \frac{b^2 - b - c}{a} = a + b + 2.$$

Demonstraţi că $a + b + c$ este pătrat perfect.

Problema 3. Cercurile $\mathscr{C}(O_1, R_1)$ şi $\mathscr{C}(O_2, R_2)$, cu $R_1 \neq R_2$, sunt tangente exterior în punctul A. Fie t o tangentă comună a celor două cercuri care nu trece prin punctul A. Perpendiculara din A pe t intersectează mediatoarea segmentului O_1O_2 în punctul B. Demonstraţi că $O_1O_2 = 2AB$.

Problema 4. Am scris numerele $1, 2, \ldots, 2023$ pe 2023 de cartonaşe pe care le-am băgat într-o cutie A şi am scris numerele $-1, -2, \ldots, -2023$ pe 2023 de cartonaşe pe care le-am băgat într-o cutie B. Apoi luăm la întâmplare câte un cartonaş din fiecare cutie şi trecem într-un tabel suma celor două numere de pe cele două cartonaşe. Continuăm procedeul până când se golesc cele două cutii. Dacă produsul celor 2023 de numere scrise în tabel este $2023 - 2^n$, unde n este un număr natural, aflaţi toate valorile posibile ale lui n.

Timp de lucru: 4 ore şi 30 de minute

Soluţii neoficiale:

Problema 1. Aflaţi toate numerele naturale nenule n, k pentru care $3 \cdot 2^k + 1 = n^2$.

Soluţie:
Ecuaţia se scrie echivalent $3 \cdot 2^k = (n-1)(n+1)$. Factorii din membrul drept diferă prin 2, deci au aceeaşi paritate. Numărul din membrul stâng fiind par, $n-1$ şi $n+1$ trebuie să fie pare. Deducem că $n-1 = 3 \cdot 2^u$ şi $n+1 = 2^v$, cu $u+v=k$, $u, v \in \mathbb{N}^*$, sau $n-1 = 2^u$, $n+1 = 3 \cdot 2^v$, cu $u+v=k$, $u, v \in \mathbb{N}^*$. Scăzând cele două relaţii obţinem $2 = 2^v - 3 \cdot 2^u$, respectiv $2 = 3 \cdot 2^v - 2^u$. Deducem că numerele 2^u şi 2^v nu sunt ambele divizibile cu 4 ci doar cu 2, adică $\min\{u, v\} = 1$.
Dacă $u = 1$, în primul caz obţinem $n = 7$, deci $v = 3$, adică $k = 4$, convine.
În cazul al doilea, $u = 1$ implică $n = 3$, care însă nu conduce la soluţie.
Dacă $v = 1$, în primul caz ajungem la $n = 1$ care nu convine, iar în cazul al doilea la $n = 5$ şi $u = 2$, deci $k = 3$, care convine.
Aşadar, soluţiile problemei sunt $n = 7$, $k = 4$ şi $n = 5$, $k = 3$.

Problema 2. Numerele naturale nenule a, b, c satisfac relaţia

$$\frac{a^2 - a - c}{b} + \frac{b^2 - b - c}{a} = a + b + 2.$$

Demonstraţi că $a + b + c$ este pătrat perfect.

Soluţie:
Rescriem succesiv relaţia astfel:
$a(a^2-a-c)+b(b^2-b-c) = ab(a+b+2)$, $a^3+b^3-a^2-b^2-ac-bc = ab(a+b)+2ab$, $(a+b)(a^2-ab+b^2)-(a+b)^2-c(a+b) = ab(a+b)$. Cum $a+b > 0$, putem împărţi cu $a+b$. Obţinem $a^2 - ab + b^2 - a - b - c = ab$, adică $a + b + c = a^2 - 2ab + b^2$, deci $a + b + c = (a-b)^2$, de unde concluzia.

Problema 3. Cercurile $\mathscr{C}(O_1, R_1)$ şi $\mathscr{C}(O_2, R_2)$, cu $R_1 \neq R_2$, sunt tangente exterior în punctul A. Fie t o tangentă comună a celor două cercuri care nu trece prin punctul A. Perpendiculara din A pe t intersectează mediatoarea segmentului O_1O_2 în punctul B. Demonstraţi că $O_1O_2 = 2AB$.

Soluţie:
Fie P şi Q punctele de tangenţă ale lui t cu cercurile $\mathscr{C}(O_1, R_1)$ şi $\mathscr{C}(O_2, R_2)$ şi m, N mijloacele segmentelor O_1O_2, respectiv PQ. Se știe (și se arată ușor) că N se află pe axa radicală a celor două cercuri, adică pe perpendiculara în A pe O_1O_2. Deducem că $AN \perp O_1O_2$, deci $AN \parallel MB$. Pe de altă parte, O_1PQO_2 este trapez dreptunghic, deci $AB \parallel O_1P$. Dar MN este linie mijlocie în acest trapez, deci și $MN \parallel O_1P$. Mai mult, $MN = \dfrac{O_1P + O_2Q}{2} = \dfrac{R_1 + R_2}{2}$. Pe de altă parte, $ANMB$

este paralelogram, deci $2AB = 2MN = R_1 + R_2 = O_1O_2$.

Problema 4. Am scris numerele $1, 2, \ldots, 2023$ pe 2023 de cartonaşe pe care le-am băgat într-o cutie A şi am scris numerele $-1, -2, \ldots, -2023$ pe 2023 de cartonaşe pe care le-am băgat într-o cutie B. Apoi luăm la întâmplare câte un cartonaş din fiecare cutie şi trecem într-un tabel suma celor două numere de pe cele două cartonaşe. Continuăm procedeul până când se golesc cele două cutii. Dacă produsul celor 2023 de numere scrise în tabel este $2023 - 2^n$, unde n este un număr natural, aflaţi toate valorile posibile ale lui n.

Soluţie:
În cutia A sunt 1012 cartonaşe cu numere pare, la fel şi în cutia B. În total, sunt 2024 de numere pare şi doar 2023 de perechi (2023 de sume). Din principiul cutiei rezultă că într-una din sumele din tabel, ambii termeni au fost pari, deci în tabel avem cel puţin un numar par. Deducem că produsul numerelor din tabel este mereu un număr par. Pe de altă parte, dacă $2023 - 2^n$ este par, atunci $n = 0$. Aşadar, singura valoare eventual posibilă este $n = 0$.
Reciproc, să arătăm că există o manieră de a extrage numerele din cutii astfel încât produsul numerelor din tabel să fie $2023 - 2^0 = 2022$. Vom grupa numere în felul următor: $(2023, -1)$, $(2022, -2023)$, $(2021, -2022)$, …, $(2, -3)$, $(1, -2)$. Scenariul propus este cel în care se extrag mereu numere din aceeaşi pereche. (Primul număr din pereche este pe un cartonaş din cutia A, al doilea pe un cartonaş din cutia B.)
În acest caz, cele 2023 de numere scrise în tabel sunt 2022 (o dată) şi -1 (de 2022 de ori). Produsul numerelor din tabel este, în acest caz, $2022 \cdot (-1)^{2022} = 2022$.
Aşadar, pentru $n = 0$ chiar este posibil ca produsul numerelor din tabel să fie $2023 - 2^n$.
În concluzie, $n = 0$ este singurul număr cu proprietatea cerută.