CUM EXPLOATĂM UN ANUMIT TIP DE IPOTEZE (Despre ,,lipiri” şi ,,spargeri”)

de ANDREI ECKSTEIN

În multe probleme de geometrie, în ipoteză sau în concluzie, intervin condiţii (relaţii) de tipul:

,,suma lungimilor a două segmente este egală cu lungimea unui al treilea segment”.

Scopul acestui articol este de a ilustra câteva metode prin care pot fi exploatate (reformulate) asemenea condiţii.
Vom adapta aceste metode şi la unghiuri şi vom vedea cum ar fi putut elevii de clasa a VII-a rezolva o problemă de la ultima ediţie a Olimpiadei Naţionale de Matematică, Constanţa, 2009. (Din peste 100 de participanţi un singur elev a rezolvat problema.)

Să presupunem că avem o condiţie de tipul $AB + CD = EF$ pe care dorim s-o rescriem echivalent sub o formă mai uşor de exploatat.

Metoda ,,lipirii” constă în a ,,lipi” la unul din capetele segmentului $[AB]$ un segment congruent cu $[CD]$. Putem alege capătul la care dorim să facem lipirea. Vom obţine două segmente de lungime EF, unul din ele coliniar cu $[AB]$. Astfel am transformat, în mod echivalent, condiţia noastră într-o condiţie clasică: congruenţa a două segmente. (Această condiţie se exploatează ca de obicei: segmentele congruente ,,se bagă” în triunghiuri congruente.)

Metoda ,,spargerii” constă în a ,,sparge” segmentul $[EF]$ în două bucăţi, un segment congruent cu $[AB]$ şi un altul congruent cu $[CD]$. Vom considera aşadar $M \in [EF]$ astfel încât $[AB] \equiv [EM]$ şi $[CD] \equiv [FM]$ (sau putem alege M astfel ca $[AB] \equiv [FM]$ şi $[CD] \equiv [EM]$). Astfel am tradus condiţia incomodă în congruenţe de segmente.

Vom ilustra aceste două metode prin câte exemple remarcabile.

Exemplul 1. Problema coardei rupte a lui Arhimede (a se vedea şi o altă soluţie în [1])

Fie B, C două puncte pe un cerc şi M mijlocul arcului BC. Pentru un punct A aparţinând arcului mic MC, notăm cu N proiecţia lui M pe AB. Atunci $BN = NA + AC$.
(Proiecţia mijlocului arcului BC pe ,,coarda ruptă” $B - A - C$ este întotdeauna mijlocul ,,coardei rupte”.)
Soluţia 1: (,,lipire”) Prelungim segmentul $[NA]$ cu un segment $[AC']$, $[AC'] \equiv$

$[AC]$ (îl ,,lipim" pe $[AC]$ la $[AN]$). Atunci $m(\sphericalangle C'AC) = 180° - m(\sphericalangle BAC) = 180° - m(\sphericalangle BMC) = 2m(\sphericalangle MCB) = 2m(\sphericalangle MAB)$. Cum AC' face cu mediatoarea lui $[CC']$ un unghi de măsură $\dfrac{m(\sphericalangle C'AC)}{2} = m(\sphericalangle MAB)$, rezultă că M aparţine mediatoarei lui $[CC']$, deci $MC = MC'$. Dar $MC = MB$, deci $\Delta MNB \equiv \Delta MNC'$ (IC) $\Rightarrow BN = NC'$, deci $BN = NA + AC' = NA + AC$.
Soluţia 2: (,,spargere") Fie $C'' \in (BA$ astfel ca $BC'' = AC$. Cum $\sphericalangle MBC'' \equiv \sphericalangle MCA$ şi $MB = MC$, rezultă că $\Delta MBC'' \equiv \Delta MCA$ (LUL), de unde $MC'' = MA$. Atunci în triunghiul isoscel $MC''A$, $[MN]$ este înălţime, deci mediană, adică $C''N = NA$. Rezultă $BN = BC'' + C''N = AC + AN$.

Exemplul 2. *Fie ΔABC astfel încât $BC = AB + AD$ unde D este piciorul bisectoarei $\sphericalangle ABC$. Arătaţi că:*
(i) $m(\sphericalangle BAC) = 2m(\sphericalangle C)$ *(ii) $AD < CD < 2AD$*

Florian Dumitrel, Slatina, (Conc. de matem. ,,Nicolae Coculescu", 2006)

Vom prezenta soluţii numai la (*i*), punctul (*ii*) nefiind legat de tema noastră.
Soluţia 1: (,,lipire") Fie $A' \in AB$, $A \in (A'B)$ astfel ca $AA' = AD$ (îl lipim pe $[AD]$ la $[AB]$). Atunci $BA' = BC$, deci $\Delta A'BD \equiv \Delta CBD$ (LUL). Rezultă că $\sphericalangle AA'D \equiv \sphericalangle C$. Dar $\sphericalangle AA'D \equiv \sphericalangle A'DA$ (căci $\Delta AA'D$ este isoscel). Rezultă că $m(\sphericalangle BAC) = 180° - m(\sphericalangle DAA') = m(\sphericalangle AA'D) + m(\sphericalangle ADA') = 2m(\sphericalangle C)$.
Soluţia 2: (,,spargere") Fie $A'' \in (BC)$ astfel ca $BA'' = BA$. Atunci $\Delta BAD \equiv \Delta BA''D$ (LUL), deci $m(\sphericalangle BAC) = m(\sphericalangle BA''D)$ şi $AD = A''D$. Dar $A''C = BC - BA'' = BC - BA = AD$, deci $A''C = AD = A''D$, adică $\Delta DA''C$ este isoscel, de unde $\sphericalangle A''DC \equiv \sphericalangle C$. Atunci $m(\sphericalangle BAC) = m(\sphericalangle BA''D) = 180° - m(\sphericalangle DA''C) = 2m(\sphericalangle C)$.

În exemplul de mai jos vom ilustra şi o altă variantă de spargere, o spargere în care nu descompunem direct segmentul lung în două segmente de lungimi egale respectiv cu cele ale celorlalte segmente, ci în care considerăm o spargere gata făcută despre care arătăm că este cea bună folosind următoarea lemă:

Lemă: Fie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ astfel ca $a + b = c + d$ şi $a \cdot b = c \cdot d$. Atunci fie $a = c$ şi $b = d$, fie $a = d$ şi $b = c$.
Demonstraţie: Înlocuind $b = c + d - a$ în $a \cdot b = c \cdot d$, rezultă $a(c + d - a) = cd$. adică $ac + ad - a^2 - cd = 0$, sau $(c - a)(a - d) = 0$, de unde $c - a = 0$ sau $a - d = 0$. Dacă $c - a = 0$ rezultă $a = c$ şi apoi $b = d$, iar dacă $d - a = 0$ atunci $a = d$ şi $b = c$.
Remarcă: Evident, la nivelul clasei a IX-a această lemă rezultă imediat din relaţiile lui Viète.

Exemplul 3. *Se consideră triunghiul ABC dreptunghic în A, cu $AB < AC$. Fie punctul D pe latura AC astfel încât $\sphericalangle ACB \equiv \sphericalangle DBA$. Punctul E este proiecţia* *punctului D pe latura BC. Ştiind că $BD + DE = AC$, să se afle măsurile unghiurilor triunghiului ABC.*

Mircea Fianu, Bucureşti, (Olimpiada Naţională de Matematică, 2007)

Soluţia 1: („lipire") Prelungim $[BD]$ cu un segment $[DF] \equiv [DE]$. Cum $m(\sphericalangle FDC) = m(\sphericalangle ADB) = 90^\circ - m(\sphericalangle ABD) = 90^\circ - m(\sphericalangle C) = m(\sphericalangle CDE)$, rezultă că $\Delta FDC \equiv \Delta EDC$ (LUL), deci $m(\sphericalangle DFC) = 90^\circ$. Atunci, cum $BF = CA$ din construcţie, $\Delta ABC \equiv \Delta FCB$ (IU), deci $m(\sphericalangle ABC) = m(\sphericalangle FCB) = 2m(\sphericalangle ACB)$. De aici rezultă imediat că $m(\sphericalangle ACB) = 30^\circ$ şi $m(\sphericalangle ABC) = 60^\circ$.

Soluţia 2: (cu lema) $\Delta EDC \sim \Delta ADB$, deci $\dfrac{ED}{AD} = \dfrac{DC}{DB}$, adică $ED \cdot DB = AD \cdot DC$. Cum avem şi $ED + DB = AC = AD + DC$, cu lema rezultă că fie $ED = DC$ şi $AD = DB$, fie $ED = AD$ şi $DB = DC$. Prima variantă este imposibilă deoarece din $\Delta EDC \Rightarrow ED < DC$. Rămâne că $ED = AD$ şi $DB = DC$, deci ΔBCD este isoscel, prin urmare $\sphericalangle DBC \equiv \sphericalangle C$, de unde $m(\sphericalangle B) = 2m(\sphericalangle C)$. Concluzia rezultă la fel ca la soluţia 1.

Încheiem cu un exerciţiu care ilustează modul în care se transpun „lipirea" şi „spargerea" la unghiuri.

Exemplul 4. *Fie ABC un triunghi ascuţitunghic şi fie D un punct în interiorul triunghiului astfel încât $m(\sphericalangle ADB) - m(\sphericalangle ACB) = 90^\circ$ şi $AC \cdot BD = AD \cdot BC$.*
a) *Să se calculeze suma măsurilor unghiurilor $\sphericalangle DAC$ şi $\sphericalangle DBC$.*
b) *Să se calculeze* $\dfrac{AB \cdot CD}{AC \cdot BD}$.

Olimpiada Naţională de Matematică, 2009[1]

Observaţii: După ce am demonstrat la **a)** (exerciţiu imediat) că $m(\sphericalangle DAC) + m(\sphericalangle DBC) = 90^\circ$, ceea ce poate fi văzut ca o indicaţie pentru **b)**, suntem în posesia a două ipoteze de tipul: „*suma măsurilor a două unghiuri este egală cu măsura unui al treilea unghi*":

$$m(\sphericalangle ACB) + 90^\circ = m(\sphericalangle ADB) \qquad (1),$$

$$m(\sphericalangle DAC) + m(\sphericalangle DBC) = 90^\circ \qquad (2).$$

Vom vedea cum se poate rezolva uşor problema exploatând fie relaţia (1), fie relaţia (2), prin „spargere", respectiv „lipire".
Soluţia 1 („spargere") Folosind relaţia (1), „spargem" unghiul $\sphericalangle ADB$ în două unghiuri adiacente, $\sphericalangle ADE$ şi $\sphericalangle EDB$ astfel încât $m(\sphericalangle ADE) = m(\sphericalangle ACB)$ şi $m(\sphericalangle EDB) = 90^\circ$. (Se putea la fel de bine lua E şi invers, cu $m(\sphericalangle ADE) = 90^\circ$

[1] Această problemă este doar o parte a unei probleme date la OIM 1993

şi $m(\sphericalangle EDB) = m(\sphericalangle ACB)$.) Alegem E astfel ca $DE = DB$. Atunci relaţia din enunţ se scrie $\dfrac{AD}{BD} = \dfrac{AC}{BC}$, adică $\dfrac{AD}{ED} = \dfrac{AC}{BC}$. Cum $\sphericalangle ADE \equiv \sphericalangle ACB$, rezultă $\Delta EDA \sim \Delta BCA$, deci $\dfrac{EA}{AB} = \dfrac{AD}{AC}$ (3) şi $\sphericalangle EAD \equiv \sphericalangle BAC$. Atunci $\sphericalangle EAB \equiv \sphericalangle DAC$, de unde, cu (3), rezultă că $\Delta EAB \sim \Delta DAC$. Obţinem $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{EB}{CD}$. Cum $EB = BD\sqrt{2}$, rezultă $\dfrac{AB \cdot CD}{AC \cdot BD} = \sqrt{2} \cdot \dfrac{AB \cdot CD}{AC \cdot EB} = \sqrt{2}$.

Soluţia 2: („lipire”) Exploatând (2), vom „lipi” unghiurile $\sphericalangle DAC$ şi $\sphericalangle DBC$ şi vom forma un unghi drept. Aşadar „prelungim” unghiul $\sphericalangle DBC$ (exact aşa cum până acum „prelungeam” segmente) construind un unghi $\sphericalangle CBE$, adiacent unghiului $\sphericalangle DBC$ şi astfel ca $\sphericalangle CBE \equiv \sphericalangle CAD$. Alegem din nou E astfel ca $BE = BD$. (Iaraşi, puteam proceda şi invers, lipi unghiul $\sphericalangle DBC$ la $\sphericalangle DAC$ „de partea bună”.) Din construcţie, ΔBDE este dreptunghic isoscel, deci $DE = BD\sqrt{2}$. Din relaţia din enunţ avem $\dfrac{AD}{AC} = \dfrac{BD}{BC} = \dfrac{BE}{BC}$ şi, cum $\sphericalangle DAC \equiv \sphericalangle EBC$, rezultă $\Delta DAC \sim \Delta EBC$. Rezultă că $\dfrac{AC}{BC} = \dfrac{DC}{EC}$ şi că $\sphericalangle BCE \equiv \sphericalangle ACD$, deci $\sphericalangle ECD \equiv \sphericalangle BCA$. Atunci $\Delta ECD \sim \Delta BCA$, deci $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{CD}$, de unde $\dfrac{AB \cdot CD}{AC \cdot BD} = \dfrac{AB \cdot CD}{AC \cdot DE} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2}$.

În încheiere vă propunem spre rezolvare două probleme la care tehnicile prezentate mai sus se pretează foarte bine.

1. Fie M mijlocul laturii $[BC]$ a triunghiului echilateral ABC şi $P \in [AM]$ astfel încât $m(\sphericalangle PBM) = 15°$. Arătaţi că $AM + PM = AB$.

Olimpiadă Bosnia-Herţegovina (Concurs interjud. „Traian Lalescu”, 2003)

2. Fie patrulaterul convex $ABCD$ cu $AC \cap BD = \{O\}$, $AB + OC = BC + OA$ şi $\sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle CBD$. Să se arate că:
a) Triunghiul ABC este isoscel;
b) Dacă $m(\sphericalangle ABC) = 120°$ şi $BD = AB + BC$, atunci triunghiul ACD este echilateral.

Nicolae Tălău, Craiova, (Concurs interjud. „Discipolii lui Lazăr”, 2007)

3. Fie ABC un triunghi isoscel, cu $AB = AC$ şi $\sphericalangle BAC = 100°$. Bisectoarea unghiului $\sphericalangle C$ intersectează latura AB în punctul D. Arătaţi că $AD + CD = BC$.

BIBLIOGRAFIE:

[1] $www.mateforum.ro/viewtopic.php?p = 3038\&sid = 905e067f292ba10e3b751$