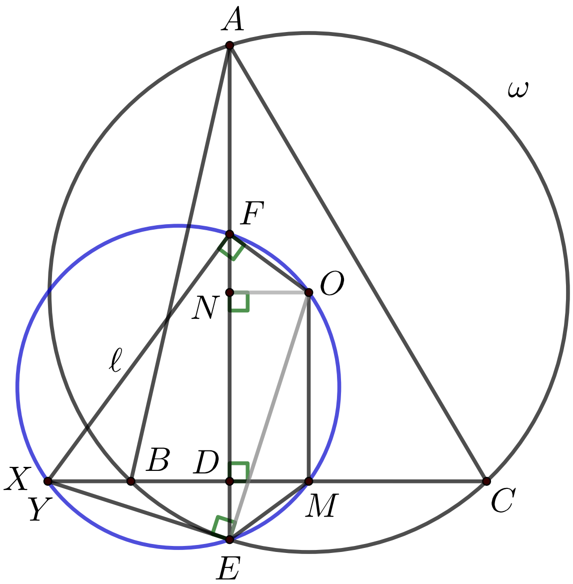
Problema săptămânii 337

Fie ABC un triunghi ascuţitunghic, ω cercul său circumscris şi O centrul acestuia. Perpendiculara din A pe BC intersectează BC în D şi ω în E. Fie F un punct pe segmentul $[AE]$ astfel încât $2FD = AE$. Fie ℓ perpendiculara în F pe OF. Arătaţi că dreapta ℓ, dreapta BC şi tangenta în E la ω sunt concurente.

antrenament Franţa, 2022-2023

Soluţia 1: Fie X şi Y punctele în care ℓ, respectiv tangenta în E la ω intersectează dreapta BC. Concluzia problemei revine la a arăta că $X = Y$.
Notăm cu M mijlocul laturii BC.
Cum $OM \perp BC$, patrulaterul $FOMX$ este inscriptibil (în cercul de diametru $[OX]$).
Cum $OE \perp EY$, patrulaterul $OMEY$ este inscriptibil (în cercul de diametru $[OY]$).
Fie N mijlocul lui $[AE]$. Atunci $ON \perp AE$ şi $NE = \dfrac{AE}{2} = DF$, deci $NF = DE$.
Deducem că $ONDM$ este dreptunghi şi că triunghiurile ONF şi MDE sunt congrente (CC), deci că $OFEM$ este trapez isoscel, deci inscriptibil. Din cele de mai sus ştim că X şi Y aparţin cercului circumscris trapezului $OFEM$ şi sunt diferite de M, deci ambele sunt cel de-al doilea punct de intersecţie a lui BC cu ω. Aşadar $X = Y$, ceea ce demonstrează concurenţa.



Soluţia 2: Fie N mijlocul lui AE şi Y punctul în care tangenta în E la ω intersectează BC. Vrem să arătăm că $YF \perp OF$, adică $YF^2 + OF^2 = OY^2$. Relaţia precedentă se scrie succesiv $YD^2+DF^2+ON^2+NF^2 = YE^2+OE^2$ sau $YD^2+DF^2+ON^2+NF^2 = YD^2 + DE^2 + ON^2 + NE^2$, adică $DF^2 + NF^2 = DE^2 + NE^2$ ceea ce rezultă din $DF = NE = \dfrac{AE}{2}$ şi $NF = EF - NE = EF - DF = DE$.

Remarcă: F este mijlocul lui AH, unde H este ortocentrul triunghiului ABC.

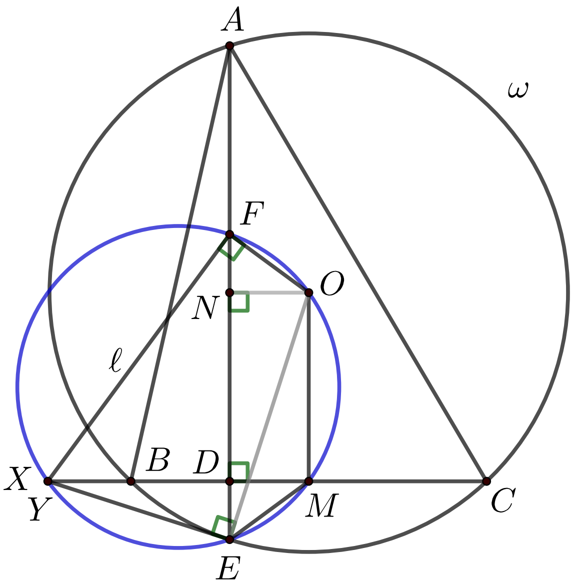
Am primit soluţii de la: *Titu Zvonaru* şi *Alexandru Ciobotea.*

Problem of the week no. 337

Let ABC be an acute triangle, ω its circumcircle and O the circumcenter. The perpendicular from A to BC intersects BC at D and ω at E. Let F be a point on the line segment $[AE]$ such that $2FD = AE$. Let ℓ be the line perpendicular at F to OF. Prove that ℓ, BC and the tangent line at E to ω are concurrent.

French training, 2022-2023

Solution 1: Let X and Y be the intersection points of BC with ℓ and the tangent line at E to ω, respectively. The conclusion of the problem is equivalent to $X = Y$.
Let M and N be the midpoints of BC and AE, respectively.
As $OM \perp BC$, quadrilateral $FOMX$ is cyclic.
From $OE \perp EY$ we get that $OMEY$ is also cyclic.
As $ON \perp AE$ and $NE = \dfrac{AE}{2} = DF$, we have $NF = DE$. Thus, $ONDM$ is a rectangle and triangles ONF and MDE are equal, hence $OFEM$ is an isosceles trapezoid. This means that $OFEM$ is cyclic. From the above we know that X and Y both belong to the circumcircle of this trapezoid. Both points also belong to BC and are different from M, so they coincide.



Solution 2: Let N be the midpoint of AE and Y the intersection between the tangent at E to ω and BC. We prove that $YF \perp OF$, i.e. $YF^2 + OF^2 = OY^2$. The previous relation becomes successively $YD^2 + DF^2 + ON^2 + NF^2 = YE^2 + OE^2$ and $YD^2+DF^2+ON^2+NF^2 = YD^2+DE^2+ON^2+NE^2$, i.e. $DF^2+NF^2 = DE^2+NE^2$ which follows from $DF = NE = \dfrac{AE}{2}$ and $NF = EF - NE = EF - DF = DE$.