

Problema săptămânii 336

Pentru Campionatul Mondial de Fotbal, firma Panini a emis n stickere (abțibilduri) cu jucătorii, stadioane, etc. Fiecare din prietenii lui Marco încearcă să-și completeze colecția de stickere, dar niciunul nu are încă toate stickerele. Spunem despre o pereche de prieteni de-ai lui Marco că este *completă* dacă împreună cei doi au toate stickerele. Marco știe exact cine ce stickere are și vrea să-și invite toți prietenii la restaurant de ziua lui. El nu vrea ca la vreo masă să existe doi prieteni care să formeze o pereche completă.

- (i) Arătați că Marco ar putea fi nevoit să rezerve cel puțin n mese diferite la restaurant.
- (ii) Arătați că n mese sunt întotdeauna suficiente pentru ca Marco să-și toate atinge scopul.

Olimpiadă Elveția, 2022-2023

Soluție:

- (i) Este suficient să prezentăm o situație în care Marco este nevoit să rezerve n mese. Să presupunem că fiecăruia dintre prietenii lui Marco îi lipsește exact un sticker și că acesta este diferit la oricare doi dintre prietenii lui Marco. Astfel, orice pereche de prieteni este una completă, astfel că la nicio masă nu poate sta mai mult de o persoană.
- (ii) Pentru a arăta că n mese sunt întotdeauna suficiente, să considerăm n mese și să asociem fiecărei mese câte un sticker. Apoi, la masa corespunzătoare unui sticker, le dăm voie să stea numai acelor prieteni care nu au respectivul sticker. Persoanele cărora le lipsesc mai multe stickere au mai multe mese între care pot alege, dar oricum vor fi făcute alegerile, la o masă nu există perechi complete deoarece oricărui comeseni le lipsește stickerul corespunzător mesei la care stau, deci la nicio masă nu există perechi complete.

Am primit soluție de la *Alexandru Ciobotea*.

Problem of the week no. 336

During the World Cup, there are n different Panini stickers to collect. Marco's friends are trying to complete their collection, but nobody has a full set of stickers yet! A pair of his friends are said to be *wholesome* if their combined collection has at least one of each sticker. Marco knows the contents of everyone's collections, and wants to take them all to a restaurant for his birthday. However, he doesn't want any wholesome pairs sitting at the same table.

- (i) Show that Marco might need to reserve at least n different tables.
- (ii) Show that n tables will always be enough for Marco to achieve his goal.

Swiss Mathematical Olympiad, 2022-2023

Solution:

- (i) A scenario which requires n tables to be reserved is the following: assume each of

Marco's n friends is missing exactly one sticker and any two of them are missing a different sticker. In this case, any pair of Marco's friends is a wholesome pair, so no two of Marco's friends may sit at the same table.

(ii) To prove that n tables are always enough, assign to each sticker a table. At the table assigned to a certain sticker, only people that do not own that sticker may sit. (People missing more than one sticker may choose between more than one table.) No pair sitting at the same table is wholesome: everybody sitting at one table is missing at least the sticker corresponding to the table in question.