Problema săptămânii 335

Determinaţi toate numerele naturale nenule x, y, z pentru care $3^x + 4^y = 5^z$.

Wacław Sierpiński

Soluţia 1:
Să observăm mai întâi că, modulo 3, avem $3^x + 4^y \equiv 1 \pmod{3}$, deci $5^z \equiv 1 \pmod{3}$, ceea ce arată că z trebuie să fie par.
Fie $c \in \mathbb{N}^*$ astfel ca $z = 2c$. Atunci $3^x = 5^{2c} - 4^y = (5^c - 2^y)(5^c + 2^y)$, deci există $u, v \in \mathbb{N}$ cu $5^c - 2^y = 3^u$, $5^c + 2^y = 3^v$, $u + v = x$. Evident, $u < v$. Prin scădere obţinem $3^v - 3^u = 2^{y+1}$, deci, modulo 3, trebuie ca $u = 0$. Aşadar $5^c + 2^y = 3^x$ şi $5^c - 2^y = 1$. Prin adunarea acestor două relaţii obţinem $2 \cdot 5^c = 3^x + 1$, deci $2 \cdot 5^c \equiv 1 \pmod{3}$, ceea ce implică c impar. Fie $c = 2b + 1$, $b \in \mathbb{N}$.
Analizând ecuaţia iniţială modulo 4, avem că $5^z - 4^y \equiv 1 \pmod{4}$, deci $3^x \equiv 1 \pmod{4}$, deci x trebuie să fie par.
Privind acum ecuaţia $5^c + 2^y = 3^x$ modulo 8, avem, în caz că $y \geq 3$, $5^c = 5^{2b+1} = 5 \cdot 25^b = 5(3 \cdot 8 + 1)^b \equiv 5 \pmod{8}$, $2^y \equiv 0 \pmod{8}$ şi $3^x = (8+1)^{x/2} \equiv 1 \pmod{8}$, deci ecuaţia $5^c + 2^y = 3^x$ nu are soluţii dacă $y \geq 3$. Modulo 4 se vede că nici pentru $y = 1$ ea nu are soluţii. În fine, în cazul $y = 2$, din $5^c - 2^y = 1$ obţinem $c = 1$, de unde $x = z = 2$.
Aşadar, unica soluţie este $x = y = z = 2$.

Soluţia 2: (*Ioan Viorel Codreanu*)
Să observăm mai întâi că, modulo 3, avem $3^x + 4^y \equiv 1 \pmod{3}$, deci $5^z \equiv 1 \pmod{3}$, ceea ce arată că z trebuie să fie par.
Analizând ecuaţia modulo 4, avem că $5^z - 4^y \equiv 1 \pmod{4}$, deci $3^x \equiv 1 \pmod{4}$, deci şi x trebuie să fie par. Dacă $x = 2a$, $z = 2c$, $a, c \in \mathbb{N}^*$, atunci $4^y = 5^{2c} - 3^{2a} = (5^c - 2^a)(5^c + 2^a)$. Deducem că există $u, v \in \mathbb{N}$ astfel ca $5^c - 3^a = 2^u$, $5^c + 3^a = 2^v$, $u + v = 2y$. Evident, $u < v$. Adunând primele două relaţii obţinem $2^u + 2^v = 2 \cdot 5^c$, adică $2^u(2^{v-u} - 1) = 2 \cdot 5^c$. Deducem că $u = 1$ şi $2^{v-1} - 1 = 5^c$, adică $5^c - 2^{v-1} = 1$. Din conjectura lui Catalan (Teorema Preda Mihăilescu) rezultă că singurele soluţii ale acestei ecuaţii sunt cele pentru $c = 1$ sau $v - 1 = 1$. Aşadar, singura soluţie este $c = 1$, $v = 3$, care conduce rapid la singura soluţie, $x = y = z = 2$.

Remarcă: (*Alexandru Ciobotea*)
Singurele triplete de numere naturale care verifică ecuaţia din enunţ sunt $(2, 2, 2)$ şi $(0, 1, 1)$.

Am primit soluţii de la: *Ioan Viorel Codreanu, Daniel Văcaru* şi *Alexandru Ciobotea.*

Problem of the week no. 335

Find all positive integers x, y, z such that $3^x + 4^y = 5^z$.

Wacław Sierpiński

Solutions in English to this problem can be found here.