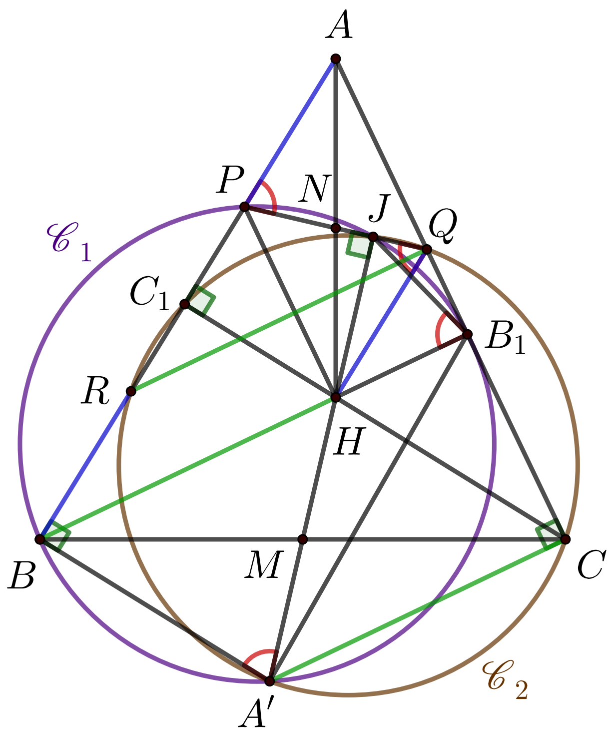
Problema săptămânii 333

Fie ABC un triunghi ascuţitunghic. Înălţimile BB_1 şi CC_1 se intersectează în H, iar A' este simetricul lui H faţă de mijlocul laturii BC. Cercurile $\mathscr{C}_1$ şi $\mathscr{C}_2$ circumscrise triunghiurilor $BA'B_1$ şi $CA'C$ intersectează a doua oară laturile AB, respectiv AC în punctele P şi Q. Demonstraţi că:
a) $APHQ$ este paralelogram.
b) Dreptele PQ şi HA' şi cercurile $\mathscr{C}_1$ şi $\mathscr{C}_2$ au un punct comun.
c) Simetricul lui P faţă de mijlocul lui AB se află pe cercul $\mathscr{C}_2$.

Andrei Eckstein

Soluţia 1:



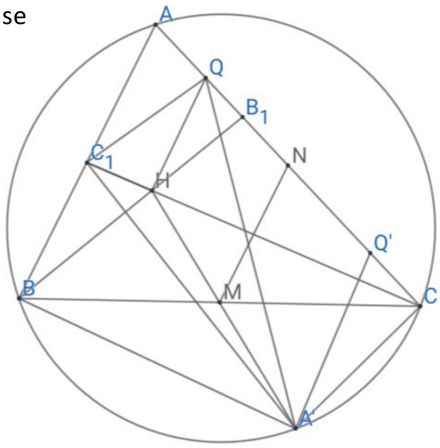
a), b) Fie M şi N mijloacele segmentelor (BC), respectiv (AH).
,,Redefinim" punctele P şi Q în felul următor.
Fie $P' \in AB$ şi $Q' \in AC$ astfel încât $AP'HQ'$ să fie paralelogram. Vom arăta că $P' = P$ şi $Q' = Q$, de unde va rezulta că $APHQ$ este paralelogram.
Deoarece $HBA'C$ este paralelogram, iar $HB \perp AC$, rezultă că $\sphericalangle ABA' = 90°$ şi, analog, $\sphericalangle ACA' = 90°$.
Avem $\sphericalangle HAP' = 90° - \sphericalangle B = \sphericalangle CBA'$ şi, analog, $\sphericalangle P'HA = \sphericalangle HAQ' = \sphericalangle BCA'$, astfel că triunghiurile $AP'H$ şi $BA'C$ sunt asemenea (de fapt, au laturile respectiv perpendiculare).
Atunci triunghiurile $AP'N$ şi $BA'M$ vor fi la rândul lor asemenea (LUL), deci $\sphericalangle AP'N = \sphericalangle BA'M$. Notând $A'M \cap P'Q' = \{J\}$, deducem că punctele P', B, A', J sunt conciclice, deci $\sphericalangle A'JP' = 180° - \sphericalangle P'BA' = 90°$. De asemenea, punctele A', C, Q', J sunt

conciclice.
Din patrulaterul inscriptibil $HJP'C_1$ avem $\sphericalangle JB_1H = \sphericalangle JQ'H = \sphericalangle Q'P'A = \sphericalangle BA'J$, ceea ce arată că patrulaterul $JBA'B_1$ este inscriptibil.
Aşadar, punctele B, A', B_1, J, P' sunt conciclice, deci $P' = P$. Analog rezultă că punctele C, A', C_1, J, Q' sunt conciclice, deci $Q' = Q$. Deci, $APHQ$ este paralelogram şi cercurile $\mathscr{C}_1$ şi $\mathscr{C}_2$ se intersectează a doua oară în $J \in AH \cap PQ$.
c) Dacă R este simetricul lui P faţă de mijlocul lui AB, atunci $BR = AP = QH$, deci $BHQR$ este paralelogram. Atunci $RQ = BH = A'C$ şi $RQ \parallel BH \parallel A'C \perp AC$ arată că $A'CQR$ este dreptunghi, deci A', C, Q, R sunt conciclice, ceea ce arată că punctul R se află pe cercul $\mathscr{C}_2$.

Soluţia 2: Vă prezentăm mai jos şi soluţia lui *Titu Zvonaru*:

<u>Soluție</u>: a) Fie R raza cercului circumscris triunghiului ABC.

Redefinim punctul Q astfel: paralela prin H la AB intersectează latura AC în punctul Q. Vom demonstra că patrulaterul $CA'C_1Q$ este inscriptibil. Se știe (sau se demonstrează ușor folosind faptul că patrulaterul BA'CH este paralelogram) că AA' este diametru în cercul circumscris triunghiului ABC.



Obținem <CAA' = 90° - B, <BAA' = 90°- C, și atunci $A'C = 2R\cos B, A'B = 2R\cos C$. Deoarece $\frac{QC}{AC} = \frac{HC}{C_1C} \Longrightarrow QC = \frac{2bR\cos C}{b\sin A} = \frac{2R\cos C}{\sin A}$, rezultă

$\mathrm{tg}(< CQA') = \frac{CA'}{QC} = \frac{2R\cos B\sin A}{2R\cos C} = \frac{\sin A\cos B}{\cos C}$,

$\mathrm{tg}(< CC_1A') = \mathrm{ctg}(< BC_1A') = \frac{BC_1}{BA'} = \frac{a\cos B}{2R\cos C} = \frac{\sin A\cos B}{\cos C}$. Rezultă că $< CQA' =< CC_1A'$, deci patrulaterul $CA'C_1Q$ este inscriptibil.

b) Avem $HB \cdot HB_1 = HC \cdot HC_1$, și atunci HA' este axa radicală a cercurilor C_1 și C_2. Cum centrele acestor cercuri sunt mijloacele segmentelor A'Q și A'P, deducem că $HA' \perp PQ$. Dacă HA' intersectează pe PQ în punctul T, atunci <QTA' + <A'CQ = 180°, atunci patrulaterul CA'TQ este inscriptibil.

c) Fie M, N mijloacele laturilor BC, respectiv AC. Paralela prin A' la AB intersectează pe AC în punctul Q'. Din trapezul A'HQQ' deducem că punctul N este mijlocul segmentului QQ'. Deoarece $< AQ'C = A$ și $< B_1BA' = 90° - < ABB_1 = A$, patrulaterul $A'BB_1Q'$ este inscriptibil.

Problem of the week no. 333

Let ABC be an acute triangle. The altitudes BB_1 and CC_1 meet at H, and A' is the reflection of H about the midpoint of BC. The circumcircles $\mathscr{C}_1$ and $\mathscr{C}_2$ of triangles $BA'B_1$ and $CA'C$ intersect again sides AB and AC respectively at P and Q. Prove that:

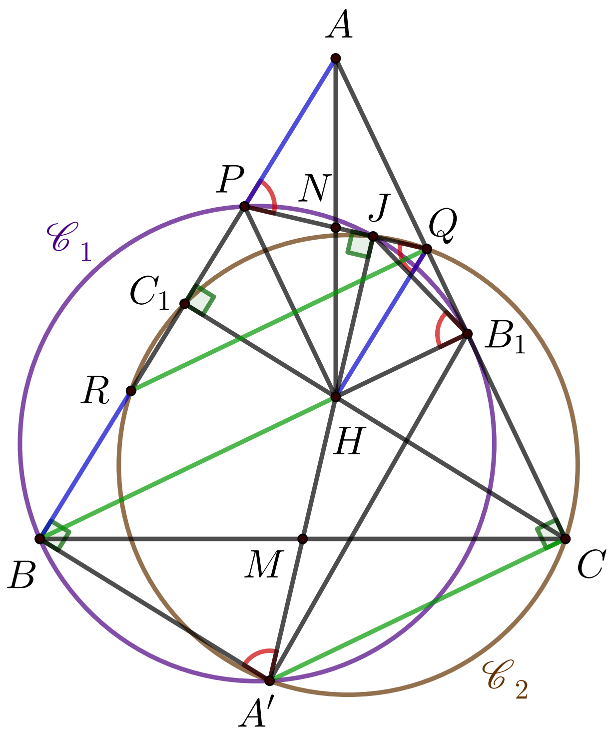
a) $APHQ$ is a parallelogram.

b) Lines PQ and HA' and the circles $\mathscr{C}_1$ and $\mathscr{C}_2$ all pass through a common point.

c) The reflection of P about the midpoint of AB also lies on $\mathscr{C}_2$.

Andrei Eckstein

Solution:



a), b) Let M, N be the midpoints of the line segments (BC) and (AH), respectively. ,,Redefine" points P and Q as follows.

Consider $P' \in AB$ and $Q' \in AC$ such that $AP'HQ'$ is a parallelogram. We prove that $P' = P$ and $Q' = Q$, which means that $APHQ$ is a parallelogram.

As $HBA'C$ is a parallelogram, and $HB \perp AC$, we get $\sphericalangle ABA' = 90°$ and, similarly, $\sphericalangle ACA' = 90°$.

We have $\sphericalangle HAP' = 90° - \sphericalangle B = \sphericalangle CBA'$ and, also, $\sphericalangle P'HA = \sphericalangle HAQ' = \sphericalangle BCA'$, hence triangles $AP'H$ and $BA'C$ are similar (their sides are mutually perpendicular). It follows that triangles $AP'N$ and $BA'M$ are also similar (SAS), therefore $\sphericalangle AP'N = \sphericalangle BA'M$. Putting $A'M \cap P'Q' = \{J\}$, we get that points P', B, A', J are co-cyclic, hence $\sphericalangle A'JP' = 180° - \sphericalangle P'BA' = 90°$. Also, points A', C, Q', J are co-cyclic.

From the cyclic quadrilateral $HJP'C_1$ we get $\sphericalangle JB_1H = \sphericalangle JQ'H = \sphericalangle Q'P'A = \sphericalangle BA'J$,

showing that quadrilateral $JBA'B_1$ is also cyclic.
Thus, points B, A', B_1, J, P' belong to the same circle, so $P' = P$. Similarly, points C, A', C_1, J, Q' are co-cyclic, hence $Q' = Q$. Thus, $APHQ$ is a parallelogram, and circles $\mathscr{C}_1$ and $\mathscr{C}_2$ meet again at $J \in AH \cap PQ$.
c) If R is the reflection of P about the midpoint of AB, then $BR = AP = QH$, therefore $BHQR$ is a parallelogram. We have $RQ = BH = A'C$ and $RQ \parallel BH \parallel A'C \perp AC$ meaning that $A'CQR$ is a rectangle, so points A', C, Q, R are co-cyclic, i.e. point R is on the circle $\mathscr{C}_2$.