Problema săptămânii 334

Fie a, b, c numere reale pozitive. Demonstraţi inegalitatea

$$\frac{abc}{a^3+b^3+c^3}+\frac{2}{3}\geq\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}.$$

Nguyen Anh Cuong

Soluţia 1: Scăzând 1 din ambii membri, inegalitatea devine

$$\frac{3abc-a^3-b^3-c^3}{3(a^3+b^3+c^3)}\geq\frac{ab+bc+ca-a^2-b^2-c^2}{a^2+b^2+c^2},$$

adică

$$\frac{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)}{3(a^3+b^3+c^3)}\leq\frac{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca}{a^2+b^2+c^2}.$$

Cum $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\geq 0$ (cu egalitate dacă şi numai dacă $a=b=c$), este suficient să demonstrăm că $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)\leq 3(a^3+b^3+c^3)$.
Această inegalitate rezultă imediat din inegalitatea lui Cebâşev pentru tripletele la fel ordonate (a, b, c) şi (a^2, b^2, c^2).
Alternativ, ea se obţine din adunarea inegalităţii $a^2b+ab^2\leq a^3+b^3$ (echivalentă cu $(a-b)^2(a+b)\geq 0$) cu analoagele ei.
Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $a=b=c$.

afară de soluţia de mai sus, am am primit de la *Titu Zvonaru* alte două soluţii instructive:

Soluţia 2: După eliminarea numitorilor se ajunge la o inegalitate în trei variabile care este simetrică (adică schimbând oricare două variabile între ele, inegalitatea nu se modifică) şi omogenă de gradul 5 (adică dacă am înlocui fiecare variabilă cu x, toţi termenii ar fi de forma αx^5, cu $\alpha\in\mathbb{R}$). O teoremă importantă spune că o asemenea inegalitate este adevărată dacă şi numai dacă este adevărată în fiecare din următoarele două cazuri:
• $b=c$,
• $c=0$.
Pentru $b=c$ inegalitatea devine $2a^5-6a^4b+4a^3b^2+4a^2b^3-6ab^4+2b^5\geq 0$. adică $2(a-b)^4(a+b)\geq 0$, evident adevărată.
Pentru $c=0$ trebuie să arătăm că $2a^2-3ab+2b^2\geq 0$, adică $2(a-b)^2+ab\geq 0$, evident adevărat.

Soluţia 3: După eliminarea numitorilor, inegalitatea se poate scrie sub forma $2a^5+2b^5+2c^5-3a^4b-3a^4c-3b^4a-3b^4c-3c^4a-3c^4b+2a^3b^2+2a^3c^2+2b^3a^2+2b^3c^2+2c^3a^2+2c^3b^2\geq 0$. (*)
Deoarece nu există termeni care să conțină toate variabilele, nu este prea greu de văzut că printr-o grupare convenabilă inegalitatea se poate scrie sub forma

$(a+b)(a-b)^4 + (b+c)(b-c)^4 + (c+a)(c-a)^4 \geq 0.$
(Cu alte cuvinte, negalitatea (*) se poate sparge în trei inegalităţi mai simple, uşor de ghicit şi de demonstrat, $(a+b)(a-b)^4 \geq 0$ şi analoagele ei.)

Morala soluţiei 3 este: dacă nu ai inspiraţie, uneori eliminarea numitorilor poate salva situaţia.

Am primit soluţii de la: *Titu Zvonaru, Daniel Văcaru, Adrian Zanca, Marius Valentin Drăgoi* şi *Alberto Radu*.

Problem of the week no. 334

Prove that the following inequality holds for all positive $a, b, c > 0$

$$\frac{abc}{a^3+b^3+c^3} + \frac{2}{3} \geq \frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}.$$

Nguyen Anh Cuong

Solution: Subtracting 1 from both sides transforms the inequality into

$$\frac{3abc-a^3-b^3-c^3}{3(a^3+b^3+c^3)} \geq \frac{ab+bc+ca-a^2-b^2-c^2}{a^2+b^2+c^2},$$

i.e.

$$\frac{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)}{3(a^3+b^3+c^3)} \leq \frac{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca}{a^2+b^2+c^2}.$$

As $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca \geq 0$ (with equality holding only for $a=b=c$), it is sufficient to prove that $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2) \leq 3(a^3+b^3+c^3)$.
This inequality follows immediately from Chebyshev's sum inequality for the triples (a,b,c) and (a^2,b^2,c^2).
Alternatively, it follows from adding the inequality $a^2b+ab^2 \leq a^3+b^3$ (equivalent to $(a-b)^2(a+b) \geq 0$) with its analogues.
Equality holds if and only if $a=b=c$.