



Secțiunea Juniori
Simulare 1 - Baraj juniori
18 Decembrie 2022

- Subiecte -

Selecție probleme
Andrei Eckstein

§1 Subiecte

Problema 1

Fie $a, b, c, d \in [0, 1]$ cu $abcd = (1 - a)(1 - b)(1 - c)(1 - d)$. Arătați că

$$1 \leq a + b + c + d - (a + b)(c + d) \leq 2.$$

Care sunt cazurile de egalitate pentru fiecare din cele două inegalități?

Problema 2

Fie M mulțimea perechilor (a, b) de numere naturale nenule, diferite, cu proprietatea că $a^2 + b^3$ divide $a^3 + b^2$.

- Arătați că, oricare ar fi $(a, b) \in M$, $\text{c.m.m.d.c.}(a, b) \neq 1$.
- Aflați cea mai mică valoare posibilă a sumei $a + b$, unde $(a, b) \in M$.
- Arătați că M are o infinitate de elemente.

Problema 3

Fie triunghiul ascuțitunghic ABC cu ortocentrul H , centrul cercului înscris I și mijloacele segmentelor AI , respectiv BC notate X , respectiv Y . Știind că $XY \perp HI$, aflați măsura unghiului BAC .

Problema 4

Pătrățelele unei table 8×8 se colorează cu alb sau cu negru astfel încât fiecare linie și fiecare coloană să conțină exact patru pătrățele albe. Demonstrați că numărul perechilor de pătrățele albe vecine este egal cu numărul perechilor de pătrățele negre vecine. (Două pătrățele sunt vecine dacă au o latură în comun.)

Timp de lucru: 240 de minute.

Pentru fiecare problemă se acordă maxim 7 puncte.

Nu este permisă utilizarea calculatorului sau a oricărui alt instrument, cu excepția riglei și a compasului.