HiPerMath by Upper.School (2022-2023)
Program for High Performance in Mathematics
- Editia a IV-a -

Secțiunea Juniori
Simulare 1 - Baraj juniori
18 Decembrie 2022

- Soluții -

Selecție probleme
Andrei Eckstein

§1 Soluții

Problema 1

Fie $a, b, c, d \in [0, 1]$ cu $abcd = (1-a)(1-b)(1-c)(1-d)$. Arătaţi că

$$1 \leq a + b + c + d - (a+b)(c+d) \leq 2.$$

Care sunt cazurile de egalitate pentru fiecare din cele două inegalităţi?

Turneul oraşelor, 2011

Demonstraţie. Relaţiile de demonstrat revin la $-1 \leq (a+b-1)(c+d-1) \leq 0$.
Prima inegalitate este evidentă deoarece $a, b \in [0,1]$ implică $|a+b-1| \leq 1$, iar $c, d \in [0,1]$ implică $|c+d-1| \leq 1$.
Egalitatea are loc dacă $a = b = 0$, $c = d = 1$ sau invers.
Presupunem, prin absurd, că $(a+b-1)(c+d-1) > 0$.
Dacă $a+b$, $c+d < 1$ atunci $a < 1-b$, $b < 1-a$, $c < 1-d$, $d < 1-c$ relaţii care înmulţite contrazic condiţia din enunţ. Dacă $a+b$, $c+d > 1$ atunci $a > 1-b$, $b > 1-a$, $c > 1-d$, $d > 1-c$ relaţii care înmulţite contrazic condiţia din enunţ.
Egalitatea are loc atunci când $a+b = 1$, $c, d \in [0,1]$ sau $c+d = 1$, $a, b \in [0,1]$.

Barem:

- rescrie inegalitatea sub forma $-1 \leq (a+b-1)(c+d-1) \leq 0$ 1p
- arată inegalitatea din stânga 1p
- cazul de egalitate în stânga 1p
- arată inegalitatea din dreapta 3p
- cazul de egalitate în dreapta 1p

$\square$

Problema 2

Fie M mulţimea perechilor (a, b) de numere naturale nenule, diferite, cu proprietatea că $a^2 + b^3$ divide $a^3 + b^2$.
a) Arătaţi că, oricare ar fi $(a, b) \in M$, c.m.m.d.c.$(a, b) \neq 1$.
b) Aflaţi cea mai mică valoare posibilă a sumei $a + b$, unde $(a, b) \in M$.
c) Arătaţi că M are o infinitate de elemente.

Demonstraţie. a) Presupunem că ar exista $(a, b) \in M$, cu a, b co-prime. Din $a^2 + b^3 \mid a(a^2 + b^3) - (a^3 + b^2)$ obţinem ca $a^2 + b^3 \mid b^2(ab-1)$. Dacă $d \mid a^2 + b^3$ şi $d \mid b^2$, atunci $d \mid a^2$, deci d este un divizor comun al lui a^2 şi b^2. Dar acestea sunt co-prime, deci $d = 1$. Rezultă atunci că $a^2 + b^3 \mid ab - 1$, ceea ce nu este posibil deoarece $0 < ab - 1 < a^2 + b^2 \leq a^2 + b^3$. Contradicţia la care am ajuns arată că a şi b nu pot fi co-prime.
b) Este uşor de văzut că $a^2 + b^3 \mid a^3 + b^2$ implică $b < a$. Căutând perechi din M cu $b = 2$ găsim imediat $a = 6$, caz în care $a + b = 8$. Într-adevăr, $6^3 + 2^2 = 220 = 5(6^2 + 2^3)$. Perechi cu suma mai mică decât 8 nu pot exista în M deoarece $d = c.m.m.d.c(a, b) \geq 2$, deci $a + b \geq 2(1 + 2) = 6$, iar perechea $(4, 2)$ nu este în M.

c) Căutăm $(a,b) \in M$ cu $b \mid a$. Atunci $a = nb$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, iar condicţia $a^2 + b^3 \mid a^3 + b^2$ revine la $b^2(n^2+b) \mid b^2(n^3b+1)$, deci la $n^2+b \mid n^3b+1$. Rezultă atunci că $n^2+b \mid n^3(n^2+b)-(n^3b+1)$, deci $n^2+b \mid n^5-1$. Putem alege, pentru orice $n \geq 2$, $b = n^5 - n^2 - 1$ (sau $n = b^4+b^3+b+1 = (b+1)(b^3+1)$) şi $a = nb$. Toate aceste perechi aparţin lui M şi sunt distincte, deci M are o infinitate de elemente.

Barem:

- a şi b nu pot fi co-prime .... $2p$
- valoarea minimă este 8 .... $2p$
- M are o infinitate de elemente .... $3p$

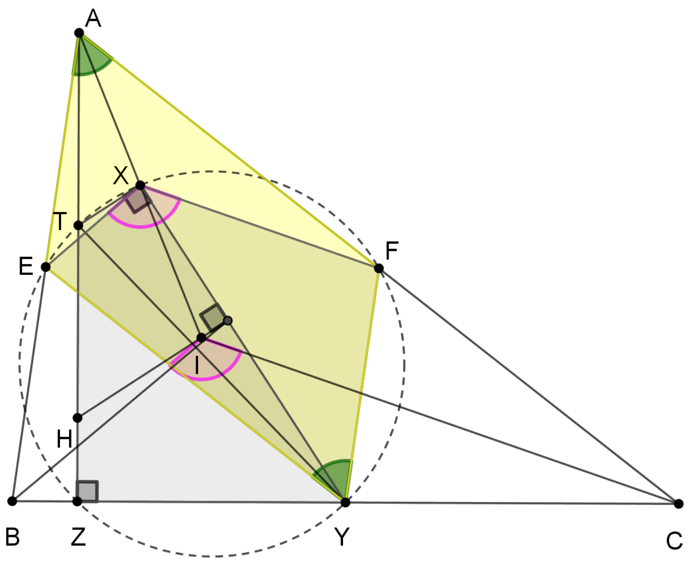
□

Problema 3

Fie triunghiul ascuțitunghic ABC cu ortocentrul H, centrul cercului înscris I și mijloacele segmentelor AI, respectiv BC notate X, respectiv Y. Știind că $XY \perp HI$, aflați măsura unghiului BAC.

Mihaela Berindeanu

Demonstraţie. Fie T, E şi F mijloacele segmentelor AH, AB respectiv AC și $AH \cap BC = \{Z\}$



Arătăm că că $TXYZ$ este un patrulater inscriptibil.
H este ortocentru implică $AZ \perp BC$. În $\triangle AHI$, TX este linie mijlocie, deci $TX \parallel HI$.
Din $TX \parallel HI$ şi $XY \perp HI$ rezultă $XY \perp TX$, iar din $XY \perp TX$ şi $AZ \perp BC$ rezultă că $TXYZ$ este patrulater inscriptibil.
De fapt, am arătat că punctul X se află pe cercul de diametru $[TY]$ care este tocmai cercul lui Euler corespunzător triunghiului ABC. Aşadar, punctele E, Z, Y, F, X, T sunt conciclice.
Calculăm acum mărimea unghiului BAC.
Din EX linie mijlocie în $\triangle ABI$ rezultă $EX \parallel BI$, iar din XF linie mijlocie în $\triangle AIC$ rezultă $XF \parallel IC$. Astfel, $\measuredangle EXF \equiv \measuredangle BIC$ ca unghiuri cu laturi paralele.
Deoarece BI și CI sunt bisectoare, avem $\measuredangle BIC = 90° + \dfrac{\measuredangle BAC}{2}$.

Deoarece $AEYF$ este paralelogram, avem $\measuredangle EYF \equiv \measuredangle BAC$
Din $EYFX$ inscriptibil $\Rightarrow \measuredangle EXF + \measuredangle EYF = 180^\circ$, adică $90^\circ + \dfrac{\measuredangle BAC}{2} + \measuredangle BAC = 180^\circ$, ceea ce arată că $\measuredangle BAC = 60^\circ$.

Barem:

- arată că $TX \perp XY$ .... $2p$
- deduce că X se află pe cercul lui Euler .... $2p$
- determină unghiul cerut .... $3p$

Vă prezentăm mai jos şi o a doua soluţie, dată de *Ana Boiangiu.*

Demonstrăm că $\angle BAC = 60^\circ$.

Fie A' simetricul lui A față de Y.

În primul rând, $ABA'C$ este paralelogram. Așadar $BH \perp AC \parallel BA'$, iar $CH \perp AB \parallel CA'$, de unde că $BHCA'$ este inscriptibil în cercul de diametru HA'.

Pe de altă parte, YX este linie mijlocie în $\triangle AIA'$, deci $XY \parallel IA'$. Dar din ipoteză știm că $HI \perp XY$, așadar $\angle HIA' = 90^\circ$.

Folosind observația anterioară deducem că I aparține $(BHCA')$. În particular $BHIC$ este inscriptibil, deci

$$\angle BHC = \angle BIC \Leftrightarrow 180^\circ - \angle BAC = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle BAC \Leftrightarrow \angle BAC = 60^\circ,$$

adică tocmai ceea ce trebuia demonstrat. $\square$

Problema 4

Pătrăţelele unei table 8×8 se colorează cu alb sau cu negru astfel încât fiecare linie şi fiecare coloană să conţină exact patru pătrăţele albe. Demonstraţi că numărul perechilor de pătrăţele albe vecine este egal cu numărul perechilor de pătrăţele negre vecine. (Două pătrăţele sunt vecine dacă au o latură în comun.)

Olimpiadă Italia, 1991

Demonstraţie. Pe fiecare coloană, ne uităm la dreptunghiurile monocolore albe şi negre de lungime maximă de pe respectiva coloană. De exemplu, dacă pe o coloană avem colorarea AANNNAAN, ne uităm la dreptunghiul alb 2×1, dreptunghiul negru 3×1, dreptunghiul alb 2×1 şi dreptunghiul negru 1×1. Putem avea 4 dreptunghiuri de o culoare (pătrate) sau 3 dreptunghiuri de o culoare (două pătrate şi un dreptunghi de lungime 2), 2 dreptunghiuri de o culoare (două dreptunghiuri de lungime 2 sau un pătrat şi un dreptunghi de lungime 3) sau un dreptunghi (de lungime 4). Dreptunghiurile de o culoare alternează cu cele de cealaltă culoare. Dacă pe o coloană sunt k dreptunghiuri de o anumită culoare, pe acea coloană sunt $4 - k$ perechi de pătrate vecine de acea culoare. Astfel, dacă pe o coloană sunt la fel de multe dreptunghiuri albe şi negre (adică pătrăţelele situate pe linia 1 şi linia 8 de pe acea coloană au culori diferite), atunci pe acea coloană sunt la fel de multe perechi de pătrate albe vecine ca şi perechi de pătrate negre vecine. Dacă pe o coloană sunt (cu 1) mai multe dreptunghiuri albe decât negre (adică pătrăţelele situate pe linia 1 şi linia 8 de pe acea coloană sunt ambele albe), atunci pe acea coloană numărul de perechi de pătrate albe vecine este cu 1 mai mare decât cel al perechilor de pătrate negre vecine. Similar pentru coloanele care au pătratele de pe liniile 1 şi 8 ambele negre. Cum pe linia 1 şi linia 8 sunt câte 4 pătrate albe şi negre, trebuie să avem la fel de multe coloane care au pătratul de pe linia 1 alb iar cel de pe linia 8 negru ca şi coloane care au, invers, pe linia 1 negru şi pe linia 8 alb. Împreună, aceste coloane ocupă la fel de multe pătrăţele albe pe linia 1 ca şi pătrăţele negre. Celelalte coloane, cele care au în capete pătrăţele de aceeaşi culoare, trebuie şi ele să ocupe împreună la fel de multe pătrăţele albe pe linia 1 ca şi pătrăţele negre, deci avem la fel de multe coloane cu ambele capete albe ca şi coloane cu ambele capete negre. Conchidem că sunt la fel de multe perechi formate din două pătrăţele negre vecine pe verticală ca şi perechi de pătrate albe vecine pe verticală. La fel este şi pe orizontală, de unde concluzia dorită.

Barem:

- arată că în coloanele cu capetele diferit colorate sunt la fel de multe perechi albe ca şi perechi negre . . . 2p
- arată că în coloanele cu ambele capete albe numărul perechilor albe este cu 1 mai mare decât cel al perechilor negre . . . 2p
- arată că sunt la fel de multe coloane cu ambele capete albe ca şi coloane cu ambele capete negre . . . 2p
- concluzia . . . 1p

$\square$