Problema săptămânii 332

În vârfurile unui cub se scriu opt numere naturale nenule diferite două câte două, apoi pe fiecare muchie a cubului se scrie cel mai mare divizor comun al numerelor scrise în capetele muchiei. Este posibil ca suma numerelor scrise în vârfuri să fie egală cu suma numerelor scrise pe muchii?

Olimpiadă Rusia, 1996

Soluţie: Vom demonstra că răspunsul este ,,nu".
Fie $a, b, c, d, a', b', c', d'$ numerele scrise în vârfurile A, B, C, D, A', B', C' respectiv D' ale cubului $ABCDA'B'C'D'$.
Să observăm că dacă în capetele unei muchii sunt scrise numerele distincte x, y, cu $(x, y) = d$, $x = dx_1$, $y = dy_1$, atunci $x + y = d(x_1 + y_1) \geq 3d$, cu egalitate dacă şi numai dacă $x = 2y$ sau $y = 2x$.
Scriind inegalitatea de mai sus pentru fiecare muchie şi adunând cele 12 inegalităţi obţinute obţinem că suma numerelor de pe muchii este mai mică sau egală decât suma numerelor din vârfuri. Egalitate am putea avea numai dacă fiecare din cele 12 inegalităţi ar fi satisfăcută cu egal, adică pentru fiecare muchie este adevărat că numărul dintr-unul din capete este dublul numărului din celălalt capăt.
Dar din fiecare vârf pleacă trei muchii, astfel că $b, d, a' \in \left\{\frac{a}{2}, 2a\right\}$, ceea ce arată că dacă numerele de pe muchii sunt distincte, egalitatea din enunţ nu poate avea loc.

Remarcă: Dacă se renunţă la condiţia ca numerele să fie distincte, este uşor de văzut că egalitatea din enunţ poate avea loc, de exemplu pentru $a = c = b' = d' = 1$, $b = d = a' = c' = 2$.

Am primit soluţii de la *Alexandru Ciobotea*.

Problem of the week no. 332

At the vertices of a cube are written eight pairwise distinct natural numbers, and on each of its edges is written the greatest common divisor of the numbers at the endpoints of the edge. Can the sum of the numbers written at the vertices be the same as the sum of the numbers written at the edges?

Russian Math Olympiad, 1996

Solution: We show that the answer is in the negative.
Let $a, b, c, d, a', b', c', d'$ be the numbers written in vertices $A, B, C, D, A', B', C', D'$, respectively, of the cube $ABCDA'B'C'D'$.
Note that if x, y are distinct integers written at the endpoints of an edge, with $(x, y) = d$, $x = dx_1$, $y = dy_1$, then $x + y = d(x_1 + y_1) \geq 3d$, equality holding when $x = 2y$ or $y = 2x$.
Writing the above inequality for each of the 12 edges and adding them, we obtain that

the sum of the numbers on the edges is less than or equal to the sum of the numbers at the vertices. Equality would only hold if each of the 12 inequalities is satisfied with equality, i.e. for each edge, one of the two numbers at its endpoints is twice the other But each vertex is the endpoint of three edges, for example A is joined with B, D and A', therefore $b, d, a' \in \left\{\frac{a}{2}\,,\ 2a\right\}$. This proves that at least two of the numbers b, d, a' are equal, so equality can not hold for distinct numbers.

Remark: Omitting the condition that the numbers are distinct, it is easy to see that the equality becomes possible: choose, for example, $a = c = b' = d' = 1$, $b = d = a' = c' = 2$.